線型解析 II 要綱 #7	2004–11–11	河野

5 固有値・固有ベクトルと対角化

この章では固有値・固有ベクトル・対角化について学ぶ。この問題ではスカラーが実数か複素数かで議論が変わってくる。特に断らない場合はどちらでも成立するが，実数と複素数で異なる場合はそれを注意する。

5.1 3 次行列の対角化

この節では 3 次行列の場合の対角化について議論する。一般の場合は次節で扱う。

例から始めよう。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

対角成分以外が 0 であるような行列を**対角行列**と呼び，行列 A に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求め，実際に $P^{-1}AP$ を求める事を**対角化**という。

対角化には色々な応用がある。ここではべき乗の計算のみを取り上げる。A の n 乗を計算してみよう。$B = P^{-1}AP$ とおくと，$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$ となる。以下同様にして $B^n = P^{-1}A^nP$ を得る。B は対角行列なので

$$B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

が分かる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

この例では P は天下りに与えられた。逆にもしこの様な P が存在したとする。$P=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とすると，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ より，$AP=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ を得る。このとき $(A\boldsymbol{a}\ A\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{c})=A(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(4\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ より $A\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{c}$ が得られる。逆にこの様な $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で 1 次独立なものが見つかれば，命題 5.1 より行列 $(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ は正則である。この変形を逆にたどり P が見つかる。

次の命題は以前扱ったがもう一度述べておく。

命題 5.1 3 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が 1 次独立である事は $P=(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ が逆行列を持つ事の必要十分条件である。

証明 P が逆行列を持つとする。$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ が成立しているとする。この式を行列とベクトルの積の形で書くと $(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$。この式の左から P^{-1} をかけると $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ を得る。

逆に $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が 1 次独立とする。$P=(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ に階数は 3 である。よって任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し $x\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{y}+z\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$ は解を持つ。$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$ とすると $\boldsymbol{e}_1=a_{11}\boldsymbol{x}+a_{21}\boldsymbol{y}+a_{31}\boldsymbol{z}$ となる a_{11},a_{21},a_{31} が存在する。同様に $\boldsymbol{e}_2=a_{12}\boldsymbol{x}+a_{22}\boldsymbol{y}+a_{32}\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{e}_3=a_{13}\boldsymbol{x}+a_{23}\boldsymbol{y}+a_{33}\boldsymbol{z}$ なるスカラーが存在する。このとき $Q=(a_{ij})$ が P の逆行列を与える。 ∎

定義 5.2 行列 A に対し，スカラー λ と $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の**固有値** (*eigenvalue, proper value*) と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の**固有ベクトル** (*eigenvector, proper value*) と言う。

$$W(\lambda)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^3 \mid A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace,proper subspace*) と言う。

$\Phi_A(t)=\Phi(t;A)=\det(tE_n-A)$ を A の**固有多項式** (*eigenpolynomial, proper polynomial*) といい，方程式，$\Phi_A(t)=0$ を A の**固有方程式** (*eigenequation, proper equation, characteristic equation*) という。また，この方程式の解を**特性解** (*characteristic root*) をいう。

命題 5.3 固有方程式 $\Phi_A(t)=0$ の 解 (特性解) が $\boldsymbol{K}$ に属していれば A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の $\boldsymbol{K}$ における解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 5.4 $\det(B)=0$ という事は，あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる事の必要十分条件である。

証明 (1)($\Longleftarrow$) 対偶を示す。$\det(B)\neq 0$ の時系 4.15 より逆行列が存在するので $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の左から B^{-1} をかけると $\boldsymbol{x}=B^{-1}B\boldsymbol{x}=B^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，よって O.K.
(2)($\Longrightarrow$)$B=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とおく。命題 5.1 より $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立ではない。よってすべては 0 では

ない実数 x, y, z が存在して $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ となる。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき，これを行列の形に直すと $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が得られる。∎

命題 5.3 は補題において $B=tE_n-A$ と考えるとでてくる。$\boldsymbol{K}$ が複素数の場合，解はいつでも複素数であるから，特性解はいつでも固有値である。実数の場合特性解が実数なら固有値，そうでなければ固有値でない。

演習問題 5.1　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

命題 5.5 3 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は 3 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が存在する事である。この時，$P=(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ とおき，$A\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{u}_i\ (i=1,2,3)$ とすると，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ が成立する。

証明　$\boldsymbol{u}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとする $(i=1,2,3)$。一次独立な $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2$ が存在するとする。

$$AP=A(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)=(A\boldsymbol{u}_1\ A\boldsymbol{u}_2A\boldsymbol{u}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{u}_1\ \lambda_2\boldsymbol{u}_2\ \lambda_3\boldsymbol{u}_3)=(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

が成立する。命題 5.1 より逆行列 P が存在するので O.K.

逆に A が対角化可能であるとき，$P=(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ を A を対角化する行列, 即ち P^1AP が対角行列とする。対角行列 $P^{-1}AP$ を $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ とすると，$A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \lambda_2\boldsymbol{u}_2, \lambda_3\boldsymbol{u}_3)$ となるので $\boldsymbol{u}_i$ は固有ベクトルである。P が逆行列を持つので $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立である。∎

演習問題 5.2　次の行列を対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$