線型解析 II 要綱 #8	2004–11–16	河野

5.2 対角化問題

前節で考えた固有値・固有ベクトル等を一般の n 次行列に対し定義する。そして対角化に関する理論を見た後，実際に対角化する方法を整理しておく。

定義 5.6 (1) **線型写像に対する固有値・固有ベクトル**[1] V をベクトル空間とし，$f : V \to V$ を線型写像とする。スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ となる時，λ を f の**固有値** (*eigenvalue*) と言い，$\boldsymbol{v}$ を（λ に属する）f の**固有ベクトル** (*eigenvector*) と言う。

$$W(\lambda) = \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid\ f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}\,\}$$

を λ に属する f の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace*) と言う。

(2) **行列に対する固有値・固有ベクトル** n 次行列 A に対し，スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の**固有値** (*eigenvalue*) と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の**固有ベクトル** (*eigenvector*) と言う。

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace*) と言う。

(3) **固有方程式** n 次行列 A に対し，$\Phi_A(t) = \det(tE_n - A)$ を A の**固有多項式** (*eigenpolynomial*) といい，方程式，$\Phi_A(t) = 0$ を A の**固有方程式** (*eigenequation*) という。また，この方程式の複素数における解を**特性解** (*characteristic root*) をいう。

命題 5.7 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の $\boldsymbol{K}$ における解は A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の $\boldsymbol{K}$ における解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。次の補題の証明は補題 5.4 と同様にできる。

補題 5.8 $\det(B) = 0$ という事は，あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となることの必要十分条件である。

命題 5.7 は補題 5.8 において $B = tE_n - A$ とおけばでてくる。

演習問題 5.3 補題 5.8 及び命題 5.7 を証明せよ。

演習問題 5.4 次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

[1]線型写像の固有値に関して講義では取り扱わないが，重要な概念であるので定義のみ書いておく

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

命題 5.9 n 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は n 個の１次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が存在する事である。この時，$P = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ とおき，$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i \ (i = 1, \ldots, n)$ とすると，
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ は対角行列。

この証明は命題 5.5 と同様なので演習問題とする。

演習問題 5.5 命題 5.9 を証明せよ。

この命題から，対角化をするためには固有ベクトルの 1 次独立性をチェックする事が重要である事が分かるが，これに関しては次が基本的である。

定理 5.10 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ を行列 A の相異なる固有値，$\boldsymbol{x}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとすると，それらは１次独立。

証明 s についての帰納法で示す。
(1) $s = 1$ の時。$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ より $\{\boldsymbol{x}_1\}$ は１次独立である。
(2) $s = k$ の時成立を仮定する。つまり

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$$

は１次独立とする。スカラー $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ に対し

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

が成立している時に $a_1 = \cdots = a_{k+1} = 0$ を導けばよい。式 (1) に左から行列 A 書けた時 $\boldsymbol{x}_i$ が固有ベクトルである事に着目すると

$$\lambda_1 a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k a_k\boldsymbol{x}_k + \lambda_{k+1} a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

が得られる。この時式 (1) を λ_{k+1} 倍して式 (2) から引くと

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

が得られ１次独立性より

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1 = \cdots = (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k = 0$$

$\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0 (i = 1, \ldots, k)$ より $a_1 = \cdots = a_k = 0$ が得られ，式 (1) に戻って考えれば $a_{k+1} = 0$ が得られる。∎

系 5.11 n 次行列 A が相異なる n 個の固有値を持てば対角化可能。

系 5.12 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 (特性解) がすべて固有値である時，各固有値 λ に対し $\dim W(\lambda) =$ (λ の重複度) が成り立てば，対角化可能。

系 5.11 は説明の必要はないであろう。固有値に対して少なくとも 1 個は固有ベクトルが存在するという事実と定理 5.10 から従う。系 5.12 を示すためには「各固有値に対し 1 次独立なベクトルを選ぶと，このベクトルの組は１次独立である事」を定理 5.10 から示す必要がある。この事は少し分かりにくいかもしれないので，特別な場合で説明する。λ_1, λ_2 を行列 A の相異なる固有値する。ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を λ_1 に属する固有ベクトルで１次独立なもの，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ を λ_2 に属する A の固有ベクトルで１次独立なものとする。このとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ **が１次独立である事が定理** 5.10 **から次の様に分かる。**$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{w}_1 + a_4\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ とおくと $A\boldsymbol{x} = A(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = A(a_1\boldsymbol{v}_1) + A(a_2\boldsymbol{v}_2) = a_1A\boldsymbol{v}_1 + a_2A\boldsymbol{v}_2 = a_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\lambda_1\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}$ となる。また $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = -a_3\boldsymbol{w}_1 - a_4\boldsymbol{w}_2$ なので $A\boldsymbol{x} = A(-a_3\boldsymbol{w}_1 - a_4\boldsymbol{w}_2) = -a_3A\boldsymbol{w}_1 - a_4A\boldsymbol{w}_2 = -a_3\lambda_2\boldsymbol{w}_1 - a_4\lambda_2\boldsymbol{w}_2 = \lambda_2(-a_3\boldsymbol{w}_1 - a_4\boldsymbol{w}_2) = \lambda_2\boldsymbol{x}$ となる。よって $\lambda_1\boldsymbol{x} = \lambda_2\boldsymbol{x}$ となり，$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る。$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。定理 5.10 を用いると $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ から $a_1 = a_2 = 0$ が得られる。このとき $a_3\boldsymbol{w}_1 + a_4\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ なので $a_3 = a_4 = 0$ となり，１次独立性が示される。以上の議論は一般の場合もできるので，**各固有値に対し１次独立な固有ベクトルを選べば，全体のベクトルの組も１次独立になる**事が分かる。

今まで述べたことに基づいて，ここで対角化の手順についてまとめておこう。ここでの話は一般の n 次行列に適用可能であるが，簡単のため例をあげ説明する。例としてこの章で最初にあげた行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を取る。

(1) 固有方程式を求める。： 固有値を求めるために固有方程式を計算する。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = 0$ であった。今の場合

$$\Phi_A(t) = \det(tA - E) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$

なので固有方程式は $t^3 - 6t^2 + 9t + 4 = 0$ である。

(2) 固有値を求める。： $t^3 - 6t^2 + 9t + 4 = (t-4)(t-1)^2 = 0$ なので解は $t = 4, 1$ である[(2)]。この例の場合解はすべて実数解なので特に問題はないが，一般の場合は注意が必要である。$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の時は問題ないが，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ のときは解がすべて実数解である必要がある。解がすべて実数解でない場合は対角化はできない。例えば $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を例にとる。B の固有方程式は $\Phi_B(t) = (t-1)(t^2+1) = 0$ なので $t = 1$ という実数解を持つが，他に $t = \pm i$ という虚数解を持つ。この行列 B は $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合は対角化不可能である。

(3) １次独立な固有ベクトルを n 個求める。： 各固有値に対応する固有ベクトルを求める。固有値に対応する固有ベクトルが存在する事は理論的に保証されている。計算した結果，求めるベクトルがゼロベクトルしか存在しないという結論になった場合，**固有値の計算または固有ベクトルの計**

[(2)]今の場合行列式の計算と因数分解は別のステップとして行ったが，行列式計算の途中で因数分解が出て来るように変形した方が計算が簡単かもしれない。

算のどちらかが間違っている。逆にいうと固有ベクトルがきちんとでてきた場合**固有値の計算が正しい事が保証される。**

固有値が重解でない場合は固有ベクトルを 1 個決めればよいが，重解の場合はその重複度の分だけ 1 次独立な固有ベクトルを選ぶ必要がある。**重複度分の 1 次独立な固有ベクトルが存在する場合もあるし，存在しない場合もある。**存在しない場合は対角化不可能である。

A について固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 4 に対応する固有ベクトルとする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より連立方程式

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4x \\ x + 2y + z &= 4y \\ x + y + 2z &= 4z \end{aligned}$$

が得られる。これを解いて (連立方程式の解法については既知とし，途中計算は省略する),

$$x = y = z$$

を得る。固有ベクトルを 1 つ (**自分で**) 決めるため，$x = 1$ とおくと $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる。

次に 1 に対応する固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 に対応する固有ベクトルとする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より連立方程式

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= x \\ x + 2y + z &= y \\ x + y + 2z &= z \end{aligned}$$

が得られる。これを解いて (連立方程式の解法については既知とし，途中計算は省略する),

$$x + y + z = 0$$

を得る。1 は固有方程式の重解 (2 重解) なので，1 次独立な 2 個のベクトルを選ぶ必要がある。いろいろな選び方があるが，ここでは章の最初でとりあげた例 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

この例の場合 2 重解に対応する固有値に対し 2 つの 1 次独立な固有ベクトルが存在したが，一般には正しくない。例えば $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し固有方程式は $\Phi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 = 0$ なので固有値は 1 である。固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ より $x + y = x, y = y$ となり，$y = 0$ を得る。よってこの場合 1 次独立なベクトルは 1 つしか選ぶ事ができない。B は対角化することはできない。

(4) 対角化する行列を選び，逆行列を計算し，対角化を実行する。： (3) で求めた固有ベクトルを並べてできる行列が求める行列である。今の場合

$$P = (\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

がそれである。逆行列を求めると $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ となり，

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 5.6　次の行列が対角化可能かどうか調べよ。ただし $\boldsymbol{K}$ は実数の場合と複素数の場合の 2 通りの場合を調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

演習問題 5.7　演習問題 5.4 の行列に対し $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合と $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の 2 つの場合に対角化を試みよ。対角化不可能な場合は理由も述べること。

対角化できない行列に対して対角化とまではいかなくても次善の策を考えよう。それは 3 角化と呼ばれる。行列が固有値を持たない場合は手の打ちようがないが[3]行列が固有値を持つ場合を考える。

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ として対角化を試みる。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(A - tE) = -(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) = (t-2)(t-1)^2 = 0$ なので特性解は $t = 2, 1$ である。2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

[3] 演習問題 5.6 の 1) で実数の範囲で考えた場合 $(\theta \neq 0, \pi)$ がそうなっている

$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ より $x = y = 0$ が従う。そこで $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$t = 1$ は重解なので解の重複度は 2 である。1 に対応する 1 次独立な 2 個の固有ベクトルが存在すれば対角化できる。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$B\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2$ より $z = -x, y = -z$ が従う。これを満たす 1 次独立なベクトルは 1 個しか存在しない。$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。このままでは対角化できないが 3 番目のベクトルとして $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立になるような任意のベクトル $\boldsymbol{x}_3$ を選ぶ。それを $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする。$P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3)$ は $a+b \neq 0$ のとき逆行列を持ち $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b-c}{a+b} & -\dfrac{a+c}{a+b} & 1 \\ \dfrac{b}{a+b} & -\dfrac{a}{a+b} & 0 \\ \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{a+b} & 0 \end{pmatrix}$ となり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a+c \\ 0 & 1 & -(a+b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。この様な行列を下 3 角行列と呼ぶ。一般に行列 $A = (a_{ij})$ が $i > j$ に対し $a_{ij} = 0$ となっているとき**下 3 角行列**という。n 次行列 A が重複度もこめて固有値を n 個持つとき，正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が下 3 角行列になる。

$\boldsymbol{x}_3$ を $a + c = 0$ となる様に選べば，もう少し簡単な行列になるが，これがどの様な条件なのか述べよう。
n 次行列 A が λ を固有値に持つとする。固有方程式の λ の重複度が n_1 だとする。$W(\lambda)$ の次元が n_1 であれば，n_1 個の 1 次独立なベクトルが選べるが，一般には次元は n_1 以下である。次元が n_1 よりほんとに小さいときは n_1 個は選べない。

そこで $U(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid\ (A - \lambda E)^{n_1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と定義する。$U(\lambda)$ は**一般固有ベクトル空間**と呼ばれる。$W(\lambda) \subseteq U(\lambda)$ となり，また $\dim U(\lambda) = n_1$ である事が分かる。そこで固有ベクトルでは足りない分のベクトルを $U(\lambda)$ から選ぶ事にすると，$P^{-1}AP$ は少し簡単になる。上の $c - b = 0$ という条件は $\boldsymbol{x}_3 \in U(1)$ という条件なのであった。これをチェックしておこう。$C = B - 1E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，$U(1) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \ \middle|\ C^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ より，$\boldsymbol{x} \in U(1)$ となる条件は $a + c = 0$ である事が分かる。