線型解析 II 要綱 #10

2003–12–14　　河野

6.3 演算子法

微分するという操作を演算子の様に考え微分方程式を解く方法を紹介しよう。この節では特に断らなければ独立変数は x とする。

関数 y に対しその導関数 y' を対応させる写像を D と書く。独立変数を明示的に表したいときは D_x と書く。$D(y) = y'$ だから例えば命題 6.1 の微分方程式は $D(y) = ky$ と書ける。

定数 λ を定数倍するという演算子と見る。即ち λ を，y に対し λy を対応させる (関数を λ 倍するという) 演算子と考える。同様に関数 $p(x)$ を関数倍する (y に対し $p(x)y$ を対応させる) 演算子と見る事ができる。

演算子 E, F があるとき演算子の和 $E+F$ を $(E+F)(y) = E(y)+F(y)$ で定義する。積 DE を $(FE)(y) = F(E(y))$ で定義する。一般には $FE \neq EF$ である。例えば $E = D$,$F = p(x)$(関数倍) とすると $FE(y) = p(x)y'$ だが，$EF(y) = E(p(x)y) = p'(x)y + p(x)y'$，即ち $EF - FE = p'(x)$ となり，$p'(x) \neq 0$ のときは $EF \neq FE$ である。$EF \neq FE$ 除くと加法の交換法則，分配法則等実数の和・積と同じ様に計算できる。

命題 6.1 の微分方程式は $D(y) = \lambda y$ であったが，$D(y) - \lambda y = 0$ と変形し，$D - \lambda$ を演算子と考えると $(D - \lambda)y = 0$ という式が得られる。

命題 6.3 $e^{\lambda x} D e^{-\lambda x} = D - \lambda$ が成立する。更に $P(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ とすると $e^{P(x)} D e^{-P(x)} = D - p(x)$ が成立する。

証明　式が意味している事は任意[(1)]の関数 y に対し $(e^{\lambda x} D e^{-\lambda x})y = (D - \lambda)y$ が成立する事である。

$(De^{-\lambda x})y = D(e^{-\lambda x}y)$ であり，積の微分法より $D(e^{-\lambda x}y) = D(e^{-\lambda x})y + e^{-\lambda x}D(y) = -\lambda e^{-\lambda x}y + e^{-\lambda x}D(y) = e^{-\lambda x}\{D(y) - \lambda y\} = e^{-\lambda x}(D - \lambda)y$ となる。両辺に $e^{\lambda x}$ を掛けると $(D - \lambda)y = e^{\lambda x}\left\{D(e^{-\lambda x}y)\right\} = e^{\lambda x}\left\{(De^{-\lambda x})y\right\} = \left(e^{\lambda x}De^{-\lambda x}\right)y$ となり証明が終わる。後半の証明は $D(e^{P(x)}) = p(x)e^{P(x)}$ である事に注意すれば同様にできる。 ∎

演算子法を用いて命題 6.1 の別証明を与えよう。$Du = 0$ なら $u = C$(定数) である事を注意しておく。(一般に $Du = f(x)$ なら積分する事により $u = \displaystyle\int f(x)dx$ が得られる。) 与えられた微分方程式は演算子を用いて $(D - \lambda)y = 0$ と書ける。命題 6.3 より $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}y = 0$ となる。$u = e^{-\lambda x}y$ とおくと $e^{\lambda x}Du = 0$ となり，両辺に $e^{-\lambda x}$ を掛けると $Du = 0$ を得る。よって $u = C$ となる。$C = u = e^{-\lambda x}y$ より $y = Ce^{\lambda x}$ を得る。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1)勿論微分可能な関数でなければ，D は作用できない。厳密には考えている範囲をきちんと定義する必要があるがここではきちんとさせないでおく。それがいやな人は，さしあたり C^∞ 関数全体を考えておけばよいだろう。

6.4　線型微分方程式

演算子[2]L が**線型** (*linear*) であるとは (a) 任意の関数 y_1, y_2 に対し $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_1)$ (b) 任意の定数 α と任意の関数 y に対し $L(\alpha y) = \alpha L(y)$ が成立する事をいう。微分演算子 D，定数倍，関数倍等は線型演算子である。線型演算子の和・積 (合成) はまた線型演算子になる。

線型でない演算子は沢山ある。例を 1 つあげておこう。$L(y) = y'y' - y$ と定義する。$L(y_1+y_2) = (y_1+y_2)'(y_1+y_2)' - (y_1+y_2) = y_1'y_1' - y_1 + y_2'y_2' - y_2 + 2y_1'y_2' = L(y_1) + L(y_2) + 2y_1'y_2'$ となり $y_1'y_2' \neq 0$ のときは (a) が成立しない。よってこの L は線型演算子ではない

L を線型演算子とする。

$$L(y) = f(x)$$

の形の微分方程式を**線型微分方程式** (*linear differential equation*) と呼ぶ。$f(x) = 0$ のとき**同次型**といい，$f(x) \neq 0$ のとき**非同次型**という。命題 6.1 の微分方程式は線型であり，同次型である。

線型微分方程式は微分方程式のなかでも最も簡単なものであるが，理論上も応用上も重要である。この講義では定数係数の 2 階の線型微分方程式を取り扱う。

命題 6.4 L を線型演算子とし，線型微分方程式

$$L(y) = f(x) \qquad (*)$$

を考える。このとき $(*)$ から得られる同次型の微分方程式を

$$L(y) = 0 \qquad (**)$$

とする。このとき

「$(*)$ の一般解」=「$(*)$ の特殊解」+「$(**)$ の一般解」

となっている。

証明　$(*)$ の特殊解 y_0 が 1 つ与えられているとき次の 2 つを示せばよい。
(1) $(*)$ の任意の解 y に対し $(**)$ の解 y_1 が存在して $y = y_0 + y_1$ となる。
(2) $(**)$ の任意の解 y_1 に対し $y = y_0 + y_1$ は $(*)$ の解である。

y を $(*)$ の任意の解とする。$y_1 = y - y_0$ とおくと，L は線型演算子なので $L(y_1) = L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = f(x) - f(x) = 0$ となる。よって y_1 は $(**)$ の解である。

$(**)$ の任意の解を y_1 とする。$y = y_0 + y_1$ とおくと，$L(y) = L(y_0 + y_1) = L(y_0) + L(y_1) = f(x) + 0 = f(x)$ となる。よって y は $(*)$ の解である。 ∎

この命題により非同次型の一般解を求めるためには非同次型の特殊解と同次型の一般解を求めればよい事が分かる。そこで同次型の一般解を求める事を考える。ここでは 1 階の変数係数と 2 階の定数係数線型微分方程式を考える。

命題 6.5 $L = D - p(x)$ とする。同次型の 1 階の変数係数線型微分方程式

$$L(y) = 0$$

[2] ここで演算子とは微分演算子，定数倍，関数倍からできるものに限定している。

の一般解は $P(x)=\displaystyle\int p(x)dx$ とするとき

$$y=Ce^{P(x)}=C\exp(P(x))=C\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

である。

証明　命題 6.3 より $e^{P(x)}De^{-P(x)}=D-p(x)$ なので $L(y)=0$ は $e^{P(x)}De^{-P(x)}y=0$ と変形できる。$u=e^{-P(x)}y$ とおくと，$e^{P(x)}Du=0$ より $Du=0$ を得る。よって $u=C$ とできるので，$y=ue^{P(x)}=Ce^{P(x)}$ が分かる。∎

この $y=C^{P(x)}$ が一般解になっている事をチェックしておこう[(3)]。y をこの微分方程式の任意の解とする。$y(0)=b_0$ とするとき，$C_1=\dfrac{b_0}{e^{P(0)}}$ とおき，$y_1=C_1e^{P(x)}$ とおく。y と y_1 は共にこの微分方程式の解であり，$y(0)=b_0=y_1(0)$ を満たす。よって定理 6.2 より $y=y_1$ となり，$y=C_1e^{P(x)}$ となっている。

2 階の定数係数線型微分方程式を考える。一般論の前に $L=D^2-\lambda^2$ (ただし $\lambda\neq0$ とする) とするとき 2 階の定数係数同次型線型微分方程式

$$L(y)=0$$

を解いてみよう。

定数倍という演算子は D と交換可能, 即ち $D\lambda=\lambda D$ が成立する事を注意しておこう。$D^2-\lambda^2=(D-\lambda)(D+\lambda)$ が成立するので $L(y)=(D^2-\lambda^2)y=(D-\lambda)(D+\lambda)y=0$ が成立している。$u=(D+\lambda)y$ とおくと，$(D-\lambda)u=0$ である。命題 6.3 より $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}=D-\lambda$ なので $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}u=0$ が成立している。$v=e^{-\lambda x}u$ とおくと，$e^{\lambda x}Dv=0$ より，$Dv=0$ となる。よって $v=C_1$ としてよい。このとき $u=e^{\lambda x}v=C_1e^{\lambda x}$ となる。よって微分方程式は

$$(D+\lambda)y=C_1e^{\lambda x}$$

となる。命題 6.3 より $(D+\lambda)=e^{-\lambda x}De^{\lambda x}$ となるので

$$e^{-\lambda x}De^{\lambda x}y=C_1e^{\lambda x}$$

を得る。$z=e^{\lambda x}y$ とおくと $Dz=C_1e^{2\lambda x}$ となる。両辺を積分する事により $z=\dfrac{C_1}{2\lambda}e^{2\lambda x}+C_2$ となる。$\dfrac{C_1}{2\lambda}$ をあらためて C_1 とおくと $z=C_1e^{2\lambda x}+C_2$，よって一般解 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$ を得る。

多項式 $\varphi(t)=t^2+at+b$ に対し t に演算子 D を形式的に代入してできる演算子 D^2+aD+b を $\varphi(D)$ と表す。多項式 $\varphi(t)$ が $\varphi(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ と因数分解されているとき演算子 $\varphi(D)$ も $\varphi(D)=(D-\alpha)(D-\beta)$ と分解される。

---

(3) 命題 6.5 の証明をきちんと読めば，その事も示されている事が分かる。ここでは得られた微分方程式の解が一般解かどうかを解を得た方法と切り離して議論する事を考えている。

命題 6.6 2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\varphi(D)y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

証明　命題前の注意より微分方程式 $\varphi(D)y = 0$ は $(D-\alpha)(D-\beta)y = 0$ と書ける。$u = (D-\beta)y$ とおくと $(D-\alpha)u = 0$ を得る。命題 6.3 を用いて $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ と書き直す事ができる。$v = e^{-\alpha x} u$ とおくと $Dv = 0$ を得るので，$v = C_1$ としてよい。よって $u = C_1 e^{\alpha x}$ を得る。$u = (D-\beta)y$ に代入すると，$(D-\beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。よって $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となり，$z = e^{-\beta x} y$ とおくと $Dz = C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$ となる。

$\alpha \neq \beta$ のとき $z = \displaystyle\int C_1 e^{(\alpha-\beta)x} dx$ なので $z = \dfrac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$ となる。$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 とおくと $z = C_1 e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$ となる $y = z e^{\beta x}$ なので $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ となる。

$\alpha = \beta$ のとき $e^{(\alpha-\beta)x} = e^0 = 1$ なので $Dz = C_1$ となり，$z = \displaystyle\int C_1 dx = C_1 x + C_2$ となる。$y = z e^{\beta x} = z e^{\alpha x}$ なので $y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$ となるこれらは一般解になっている[(4)]。 ∎

演習問題 6.3　次の微分方程式を解け。できれば命題 6.5 及び命題 6.6 を用いないで，演算子法を用いて示せ。

(1) $y' + y \sin x = 0$
(2) $y' + (x+1)y = 0$
(3) $y' + e^{2x} y = 0$
(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(5) $y'' - y' - 6y = 0$
(6) $y'' + y = 0$
(7) $y'' + y = 0$
(8) $y'' - 2y' + y = 0$
(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

命題 6.6 を適用するとき $\varphi(t) = 0$ の解を実数の範囲で考えるか，複素数の範囲で考えるかで違いが出てくる。複素数の範囲で考えた場合出てくる関数は複素数値関数と考えなくてはならない。例で考えよう。

微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

を考える。$\varphi(t) = t^2 + 1$ とおくと $\varphi(D)y = 0$ と書ける。複素数の範囲で考えると $\varphi(t) = 0$ には解 $\pm i$ が存在するので，微分方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。

[(4)] 証明から分かるし，前と同様に定理 6.2 からも示す事ができる。

$C_1=1, C_2=0$ となる特殊解を y_1 とすると，$y_1=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ となるので，y_1 は実数値関数ではない。即ち $y=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$ では実数値関数という事が保証されない。

しかし微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ の実数値関数の解は存在するので，それは複素数値関数 $y=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$ の中にあるはずである。それを探そう。$C_1=\dfrac{1}{2}, C_2=\dfrac{1}{2}$ とおくと $\dfrac{1}{2}(\cos x+i\sin x)+\dfrac{1}{2}(\cos(-x)+i\sin(-x))=\dfrac{1}{2}(\cos x+i\sin x+\cos x-i\sin x)=\cos x$ が得られる。

$C_1=\dfrac{1}{2i}, C_2=-\dfrac{1}{2i}$ とおくと $\dfrac{1}{2i}(\cos x+i\sin x)-\dfrac{1}{2i}(\cos(-x)+i\sin(-x))=\dfrac{1}{2i}(\cos x+i\sin x-\cos x+i\sin x)=\sin x$ が得られる。

2 つの解が得られたので，C_1, C_2 を実数とするとき $C_1\cos x+C_2\sin x$ は微分方程式の実数値関数の解になっている。定理 6.2 を用いると実数値関数と考えたときの一般解は $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ となる事が分かる。この事を一般化すると次の命題が得られる。

命題 6.7 $\varphi(t)=t^2+at+b=0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t)=0$ の複素解を $\lambda_1\pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$\varphi(D)y=0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y=C_1e^{\lambda_1x}\cos\lambda_2x+C_2e^{\lambda_1x}\sin\lambda_2x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

証明　$\varphi(D)y=0$ の複素数値関数としての一般解は

$$y=C_1e^{(\lambda_1+i\lambda_2)x}+C_2e^{(\lambda_1-i\lambda_2)x}$$

である。$e^{(\lambda_1+i\lambda_2)x}=e^{\lambda_1x}(\cos\lambda_2x+\sin\lambda_2x)$ なので，$C_1=\dfrac{1}{2}, C_2=\dfrac{1}{2}$ とおくと特殊解 $y_1=e^{\lambda_1}\cos\lambda_2x$ が得られる。$C_1=\dfrac{1}{2i}, C_2=-\dfrac{1}{2i}$ とおくと特殊解 $y_2=e^{\lambda_1x}\sin\lambda_2x$ が得られる。$y=C_1e^{\lambda_1x}\cos\lambda_2x+C_2e^{\lambda_1x}\sin\lambda_2x$ が微分方程式の解であり，実数値関数である。

残っているのはこれが一般解かどうかである。$\lambda_2\neq0$ である事を注意しておく。y を微分方程式の任意の解とする。$y(0)=b_0, y'(0)=b_1$ とする。このとき $y_1=b_0e^{\lambda_1x}\cos\lambda_2x+\dfrac{b_1-b_0\lambda_1}{\lambda_2}e^{\lambda_1x}\sin\lambda_2x$ とおくと，y, y_1 ともにこの微分方程式の解で $y(0)=b_0=y_1(0)$ かつ $y'(0)=b_1=y_1'(0)$ となっている。定理 6.2 より一般解であることが分かる。∎

演習問題 6.4　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。できれば命題 6.7 を用いないで，命題 6.6 の形から導け。

(1) $y''+\omega^2y=0 \quad (\omega\in\boldsymbol{R})$　　(2) $y''+y'+y=0$
(3) $y''-2y'+2y=0$

次に非同次型を扱おう。3 種類の方法を紹介する。1 つ目は特殊解をあらかじめ予想して求める方法，2 つ目は演算子法，3 つ目は定数変化法と呼ばれる方法である。

(1) 特殊解予想： L を定数係数の線型演算子とする。非同次型の微分方程式 $L(y)=f(x)$ が与えられたとき，$f(x)$ の形から特殊解の形を予想する。具体例を示そう。

$$\frac{dy}{dx}-2y=e^x$$

を考える。$\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ の一般解 $y = Ce^{2x}$ は得られているとする。命題 6.4 より特殊解を 1 つ見つければよい。特殊解は $y = Ae^x$ という形をしていると予想する。この関数を微分方程式に代入すると，$y' - 2y = Ae^x - 2Ae^x = -Ae^x = e^x$ なので $A = -1$ を得る。よって特殊解として $y_0 = -e^x$ を採用すると，一般解は

$$y = C_1 e^{2x} - e^x$$

である事が分かる。

一般に $f(x)$ が (1) 多項式 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ のときは特殊解として $A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$, (2) 指数関数 $ae^{\alpha x}$ のときは $Ae^{\alpha x}$, (3) $a \sin \alpha x$ または $a \cos \alpha x$ のときは $A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$, と予想して微分方程式に代入すると係数が定まり特殊解が求まる。

(2) 演算子法： 同じ微分方程式 $(D-2)y = e^x$ の解を演算子法を用いて求める。$e^{2x} D e^{-2x} y = e^x$ なので $D(e^{-2x} y) = e^{-x}$ を得る。$u = e^{-2x} y$ とおくと $Du = e^{-x}$ なので $u = \displaystyle\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ となる。$y = e^{2x} u = -e^x + Ce^{2x}$ を得る。

(3) 定数変化法： 同次型の微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ の一般解は $y = Ce^{2x}$ である。ここで非同次型の微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^x$ の解が $y = C(x)e^{2x}$ という形をしていると仮定する。ただし $C(x)$ は定数ではなく関数とする。元の微分方程式にこの関数を代入すると $y' - 2y = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = C'(x)e^{2x} = e^x$, 即ち $C'(x) = e^{-x}$ を得る。よって $C(x) = \displaystyle\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ となる。よって求める関数は $y = (-e^{-x} + C)e^{2x} = -e^x + Ce^{2x}$ である。

例は 1 階の定数係数線型微分方程式であったが，2 階の場合も同様にできる。

演習問題 6.5 次の微分方程式を (1) 特殊解予想，(2) 演算子法，(3) 定数変化法の 3 通りの方法で解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin x$

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$