

## 6.5 連立微分方程式

この節では連立線型微分方程式の解法を考える。連立微分方程式とは、例えば、3つの微分方程式が連立されているときは以下のようなものである。 $x, y, z$  は  $t$  の関数とする。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y + z \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + 2z\end{aligned}$$

この形の微分方程式を対角化の考えを利用して解いてみよう。 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$ ,

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  と置くと、この方程式は

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

と表される。 $A$  の対角化を考える。行列の対角化の方法を用いると、例えば

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を見つける事ができて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。 $y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$  を  $y = P^{-1}x$  と置く。式 (1) は  $\frac{d}{dt}(P^{-1}x) = P^{-1}\frac{dx}{dt}$  に注意すると、

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy \tag{2}$$

と変形できる。この式 (2) は成分で書くと,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u \\ \frac{dv}{dt} &= v \\ \frac{dw}{dt} &= 4w\end{aligned}$$

なので, 簡単に解けて  $u = C_1 e^t, v = C_2 e^t, w = C_3 e^{4t}$  となるので,  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  を用いると,

$$\begin{aligned}x &= C_1 e^t + C_2 e^t + C_3 e^{4t} \\ y &= -C_1 e^t + C_3 e^{4t} \\ z &= -C_2 e^t + C_3 e^{4t}\end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 6.6 行列  $A$  が次の形の行列のとき, 式 (1) の形の微分方程式を解け。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

次に対角化できない場合を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - y\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix},$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  と置くと, この方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad (3)$$

と表される。 $A$  の対角化を考えたいが, これは対角化できない。そこで 3 角化を考える。固有値 1 に対応する固有ベクトルは 1 つは見つかる。これを例えば  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  とおく。もう一つ固有ベクトルは見つからないので, 任意のベクトル (ただし 1 次独立になるようなベクトル) を選ぶ。ここではたとえば  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  をとり,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となっている。3角化を行うと微分方程式は以前より解きやすくなる。 $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  を  $y = P^{-1}x$

と置くと,  $P^{-1} \frac{dx}{dt} = \frac{dP^{-1}x}{dt}$  に注意すると,

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy \quad (4)$$

と変形できる。この式 (4) は成分で書くと,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u + 2v \\ \frac{dv}{dt} &= v \end{aligned}$$

である。 $v$  は簡単に解けて  $v = C_1 e^t$  となるので,  $u$  に関する微分方程式

$$\frac{du}{dt} = u + 2C_1 e^t = e^t (e^{-t}u + 2C_1)$$

を得る。 $w = e^{-t}u + 2C_1$  とおく事により微分方程式  $w' = 2C_1$  が得られ, これを解くと  $w = 2C_1 t + C_2$  となる。よって  $u = 2C_1 t e^t + (C_2 - 2C_1)e^t$  を得る。結局

$$x = u = (C_2 - 2C_1)e^t + 2C_1 t e^t \quad y = -u + v = (3C_1 - C_2)e^t - 2C_1 t e^t$$

が分かる。

演習問題 6.7 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  のとき, 3) の形の微分方程式を解け。

連立微分方程式と 2 階の同次型線型微分方程式は一見違うものに見えるが, 本質的には同じものである。例えば  $y'' + ay' + by = 0$  という微分方程式は  $z = y'$  とおくと,  $z' + az + by = 0$  つまり

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 6.8 行列  $A$  が次の形の行列のとき, 式 (1) の形の微分方程式を解け。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

連立線型微分方程式を解く別の方法を紹介しよう。行列乗の関数を定義し, それを計算する事により解を求める方法である。指数関数はテーラーの定理を用いて

$$y = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

と書き表された。そこで  $n$  次行列  $X$  に対し

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots$$

と定義しよう。これが定義されるためには、各成分毎に収束する事が必要だが、その証明はここでは省略する。 $n$  次行列  $A$  に対し

$$\begin{aligned} Y = e^{At} &= E + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(At)^n + \cdots \\ &= E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= A + A^2t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} + \cdots \\ &= A \left( E + At + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} + \cdots \right) \\ &= A(e^{At}) \end{aligned}$$

となる。 $x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  とおき、 $x = e^{At}x_0$  とおくと  $\frac{dx}{dt} = \frac{de^{At}}{dt}x_0 + e^{At}\frac{dx_0}{dt}$  となる。今  $x_0$  は定数ベ

クトルとすると、 $\frac{dx_0}{dt} = 0$  なので、 $\frac{dx}{dt} = \frac{de^{At}}{dt}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax$  が分かる。

以上により微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の解で  $X(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$  を満たすものは  $x = e^{At}x_0$  という形をしている事が分かった。

残っている問題は具体的に  $e^{At}$  を計算する事である。 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  を例に計算しよう。この行列は

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  を用いて  $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  と対角化できた。 $B^n = P^{-1}A^nP$  である

事に注意すると

$$\begin{aligned} P^{-1}e^{At}P &= P^{-1} \left( E + At + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots \right) P \\ &= P^{-1}EP + P^{-1}APt + \cdots + \frac{1}{n!}P^{-1}A^nPt^n + \cdots \\ &= E + Bt + \cdots + \frac{1}{n!}B^nt^n + \cdots \\ &= e^{Bt} \end{aligned}$$

となる。ここで  $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$  なので

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= E + Bt + \cdots + \frac{1}{n!}B^nt^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}t + \cdots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}t^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる<sup>(1)</sup>。よって

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & 2e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} & 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}$$

となり,  $x = e^{At} x_0$  が計算できる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} (2x_0 - y_0 - z_0) e^t + \frac{1}{3} (x_0 + y_0 + z_0) e^{4t} \\ y &= \frac{1}{3} (-x_0 + 2y_0 - z_0) e^t + \frac{1}{3} (x_0 + y_0 + z_0) e^{4t} \\ z &= \frac{1}{3} (-x_0 - y_0 + 2z_0) e^t + \frac{1}{3} (x_0 + y_0 + z_0) e^{4t} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 6.9 この方法で演習問題 6.6 の微分方程式を解け。

---

<sup>(1)</sup>一般に対角行列  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$  に対し  $e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$  となる。