線形解析 II 問題解説 #1

河野

演習問題 3.1　上の例の $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ をもっと見やすい形で表せ。また生成系を用いて表せ。

この段階では基本変形，方程式の理論を学んでいないので，前期に解いたような方法で解く。後で理論を学んだ後にそれを使って解く問題も用意しているので，比較の事。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ である必要十分条件は x, y, z, w が連立 1 次方程式

$$\begin{array}{rcll} x + 2y + 3z + 4w & = & 0 & (1\text{ 式}) \\ 5x + 6y + 7z + 8w & = & 0 & (2\text{ 式}) \\ 9x + 10y + 11z + 12w & = & 0 & (3\text{ 式}) \\ 13x + 14y + 15z + 16w & = & 0 & (4\text{ 式}) \end{array}$$

の解になる事であった。2 式から 1 式を引いて両辺を 4 で割ると，$x + y + z + w = 0(5\text{ 式})$ を得る。1 式から 5 式を引くと，$y + 2z + 3w = 0(6\text{ 式})$ を得る。即ち x, y, z, w が与えられた連立 1 次方程式の解であるとき，x, y, z, w は連立方程式

$$y + 2z + 3w = 0 \qquad x + y + z + w = 0$$

の解である。逆にこの連立 1 次方程式の解は与えられた連立 1 次方程式の解になっている。よって

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; y + 2z + 3w = 0, x + y + z + w = 0 \right\}$$

となる。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ のとき，$y + 2z + 2w = 0, x + y + z + w = 0$ を満たしているので，$x = z + 2w, y = -2z - 3w$ を満たしている。このとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2w \\ -2z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表す事ができる。また $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T)$ なので $\mathrm{Ker}(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である。

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4$ が存在して $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x}$ となっている。即ち

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= X \\ 5x + 6y + 7z + 8w &= Y \\ 9x + 10y + 11z + 12w &= Z \\ 13x + 14y + 15z + 16w &= W \end{aligned}$$

が成立している。このとき $2Y = X + Z, 2Z = Y + W$ が成立している。逆に $2Y = X + Z, 2Z = Y + W$ が成立しているとき，$x = \dfrac{2Y - 6X}{4}, y = \dfrac{5X - Y}{4}$ とおくと，$X = x + 2y, Y = 4x + 6y, Z = 9x + 10y, W = 15x + 16y$ が成立しているので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x}$ となる。よって $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T)$ である。故に

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, 2Y = X + Z, 2Z = Y + W \right\}$$

となる。$2Y = X + Z, 2Z = Y + W$ を満たしているとき，$Z = 2Y - X, W = 3Y - 2X$ となるので

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 2Y - X \\ 3Y - 2X \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書ける。$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ なので $\mathrm{Im}(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ である。

演習問題 3.2　次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。またこの問題での $W(A)$ の基底を求めよ。

(1) $\begin{cases} x + y + z + w &= 1 \\ x + y + z + w &= a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + z + u + v &= 1 \\ x + 2y + 3z + 4v &= 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5v &= a \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 1x + 0y + 0z + 2v + 0w = 1 \\ 0x + 1y + 0z + 0v + 3w = 1 \\ 1x + 0y + 0z + 3v + 1w = 2 \\ 1x + 1y + 0z + 3v + 4w = a + 3 \\ 1x + 2y + 0z + 7v + 0w = b + 4 \end{cases}$

(1) (2 式)−(1 式) より $0=a-1$ となる。$a\neq 1$ のとき解は存在しない。よって $a=1$ とする。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in W(A,\boldsymbol{b})$ とすると (ただし，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ としている),

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1-x-y-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in W(A)$ とすると,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-z \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\in W(A)$ なので $W(A)=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$ である。また $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立なので $W(A)$ の基底になっている。

(2) 係数拡大行列を用いて連立方程式を解こう。$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ とおき $\widetilde{A}=(A\,\boldsymbol{b})$ とする。$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & a \end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 式})\to(3\text{ 式})-(2\text{ 式})]{}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 式})\to-(3\text{ 式})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -a \end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 式})\to(3\text{ 式})+(1\text{ 式})]{}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{ 式})\to(1\text{ 式})-(3\text{ 式})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 式})\to(2\text{ 式})-(1\text{ 式})]{}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{ 式})\to(1\text{ 式})-(2\text{ 式})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ となる。

よって連立 1 次方程式は $\begin{cases} x-z-2v &= 2a \\ y+2z+3v &= -a \\ u &= 1-a \end{cases}$ となる。この連立方程式はいつでも解を持つ。解を x, y, z, u, v とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2v+2a \\ -2z-3v-a \\ z \\ 1-a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W(A)$ であり，任意のベクトル

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} \in W(A)$ は $\boldsymbol{x} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表示できる。よって $W(A) = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ である。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，$W(A)$ の基底になる。

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (3\text{ 式}) - (1\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (1\text{ 式})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & a+2 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\text{ 式}) \to (5\text{ 式}) - (1\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & a+2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (3\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\text{ 式}) \to (5\text{ 式}) - 2 \times (2\text{ 式})]{}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -6 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\text{ 式}) \to (5\text{ 式}) - 5 \times (3\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & b-4 \end{pmatrix}$$ となる。

よって $a = 0$ のとき解を持ち，$x = \dfrac{-2b-3}{11}, y = \dfrac{3b-1}{11}, v = \dfrac{-b+4}{11}, w = \dfrac{b+7}{11}$ で z は任意である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2b-3 \\ 3b-1 \\ 0 \\ -b+4 \\ b+7 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置くと，$\boldsymbol{x}_1 \in W(A)$ であり，$W(A) = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となる。$\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1$ は基底である。

演習問題 3.3 $(m.n)$ 行列 A に対し $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。次の A に対しそれぞれ $\mathrm{Ker}(T)$ 及び $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解である。係数拡大行列で考える。

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (3\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 式}) \to (2\text{ 式}) - (1\text{ 式})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (3\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 式}) \to \frac{1}{4}(2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 式}) \to (1\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となる。

よって $\mathrm{Ker}(T)=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4\ \middle|\ y+2z+3w=0, x+y+z+w=0\right\}$ となる。

$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}(T)$ とすると，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4$ が存在して $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}$ と書ける。

$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\5&6&7&8&Y\\9&10&11&12&Z\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 式})\to(3\text{ 式})-(2\text{ 式})]{}\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\5&6&7&8&Y\\4&4&4&4&Z-Y\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 式})\to(2\text{ 式})-(1\text{ 式})]{}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\4&4&4&4&Y-X\\4&4&4&4&Z-Y\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 式})\to(3\text{ 式})-(2\text{ 式})]{}\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\4&4&4&4&Y-X\\0&0&0&0&Z+X-2Y\end{pmatrix}$ となる。このとき $Z+X-2Y=0$ が成立し，また $Z+X-2Y=0$ のとき，与えられた連立方程式は解を持つ事が分かる。よって $\mathrm{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3\ \middle|\ Z+X-2Y=0\right\}$ である。

(2) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}(T)$ とすると，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解である。このとき $y=0, z=0, w=0$ となる。逆に $y=z=w=0$ のとき $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}(T)$ である。よって $\mathrm{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4\ \middle|\ y=z=w=0\right\}$ となる。

$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{X}\in\mathrm{Im}(T)$ とすると，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}$ となる $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4$ が存在する。

$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&X\\0&0&1&0&Y\\0&0&0&1&Z\\0&0&0&0&W\end{pmatrix}$ を考える。解を持つためには $W=0$ が必要である。逆に $W=0$ のとき解を持つ。

よって $\mathrm{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4\ \middle|\ W=0\right\}$ となる。

(3) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}(T)$ とすると，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解である。

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (3\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (2\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 式}) \to (2\text{ 式}) - (1\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (3\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 式}) \to (1\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となる。

よって $y + 2z = 0, x + y + z = 0$ となる。逆に $y + 2z = 0, x + y + z = 0$ のとき $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ となるので,

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; y + 2z = 0, x + y + z = 0 \right\}$$

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T)$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$ となるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3$ が存在する。

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 2 & 3 & 4 & Y \\ 3 & 4 & 5 & Z \\ 4 & 5 & 6 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (3\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 2 & 3 & 4 & Y \\ 3 & 4 & 5 & Z \\ 1 & 1 & 1 & W - Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (2\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 2 & 3 & 4 & Y \\ 1 & 1 & 1 & Z - Y \\ 1 & 1 & 1 & W - Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 式}) \to (2\text{ 式}) - (1\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y - X \\ 1 & 1 & 1 & Z - Y \\ 1 & 1 & 1 & W - Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 式}) \to (4\text{ 式}) - (3\text{ 式})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y - X \\ 1 & 1 & 1 & Z - Y \\ 0 & 0 & 0 & W + Y - 2Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 式}) \to (3\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y - X \\ 0 & 0 & 0 & Z + X - 2Y \\ 0 & 0 & 0 & W + Y - 2Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 式}) \to (1\text{ 式}) - (2\text{ 式})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2X - Y \\ 1 & 1 & 1 & Y - X \\ 0 & 0 & 0 & Z + X - 2Y \\ 0 & 0 & 0 & W + Y - 2Z \end{pmatrix}$$

よって $Z + X - 2Y = 0, W + T - 2Z = 0$ が成立する。逆に $Z + X - 2Y = 0, W + T - 2Z = 0$ が成立しているとき, $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T)$ となる。よって $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; Z + X - 2Y = 0, W + T - 2Z = 0 \right\}$ となる。