

演習問題 3.5 次の行列の階数を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

基本変形で標準形に直す事により階数を求める。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行}) \rightarrow (3 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2 \text{ 行}) \rightarrow (2 \text{ 行}) - (1 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行}) \rightarrow (3 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行}) \rightarrow \frac{1}{4} \times (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行}) \rightarrow (1 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1 \text{ 行}) \leftrightarrow (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ よって階数は } 2 \text{ である。}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行}) \leftrightarrow (4 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行}) \leftrightarrow (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ よって階数は}$$

4 である。

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - 2 \times (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3 \text{ 行}) \rightarrow (3 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行}) \rightarrow (3 \text{ 行}) - (1 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ よって階数は } 1 \text{ で}$$

ある。

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行}) \rightarrow (3 \text{ 行}) - 2 \times (2 \text{ 行})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行}) \rightarrow (1 \text{ 行}) - (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行}) \leftrightarrow (2 \text{ 行})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行}) \rightarrow \frac{1}{2} \times (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

この問題は場合分けが必要になる。 $a = 2$  かつ  $b = 1$  のときは階数は 2 である。それ以外は階数は 3 になる。ここでは  $a \neq 2$  の場合を示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行}) \rightarrow \frac{1}{a-2} \times (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - (b-1) \times (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 列}) \leftrightarrow (5 \text{ 列})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$