線形解析 II 問題解説 #4

河野

演習問題 3.6　次の連立方程式が解を持つかどうか定理 3.11 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ。

(1) $\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x+y+z+w &= a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+z+u+v &= 1 \\ x+2y+3z+4v &= 0 \\ 2x+3y+4z+5v &= a \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y+2z+u+2v+w &= 1 \\ x+2y+z+2u+v+2w &= 0 \\ x-y+z-u+v-w &= a \\ x+y+z+u+v+w &= b \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 1x+1y+1z+1u+1v+2w=1 \\ 1x+2y+2z+2u+3v+3w=2 \\ 1x+1y+2z+3u+2v+3w=2 \\ 2x+2y+3z+4u+3v+5w=a+3 \\ 3x+2y+3z+4u+3v+5w=b+3 \end{cases}$

(1) $\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[(2\text{ 行})\to(2\text{ 行})-(1\text{ 行})]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$

$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=1$ である。$\operatorname{rank}\widetilde{A}$ は $a=1$ のときは 1 $a\neq 1$ のときは 2 なので，解を持つためには $a=1$ である事が必要である。

解を x,y,z,w とすると

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-y-z-w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\in W(A)$ であり，$W(A)=\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ となる。$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立なので $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ は $W(A)$ の基底である。

(2) $\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & a \end{array}\right) \xrightarrow[(3\text{ 行})\to(3\text{ 行})-(2\text{ 行})]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[(3\text{ 行})\to(3\text{ 行})-(1\text{ 行})]{}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2\text{行}) \to (2\text{行}) - (1\text{行})]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = 3 = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ なので解は存在する。$u = 1-a, y = -2z-3v+v-1 = 2z-3v-a, x = -y-z-u-v+1 = 2z+3v+a-z+a-1-v+1 = z+2v+2a$ となる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2v+2a \\ -2z-3v-a \\ z \\ 1-a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $W(A)$ の基底となる (証明略)。

(3) $$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[(2\text{行}) \to (2\text{行}) + (1\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2\text{行}) \to \frac{1}{3} \times (2\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[(4\text{行}) \to (4\text{行}) - (2\text{行})]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[(1\text{行}) \to (1\text{行}) - (2\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2\text{行}) \to (2\text{行}) - (1\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3\text{行}) \to (3\text{行}) - (1\text{行})]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & a-2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3\text{行}) \to (3\text{行}) + (2\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1/3 \end{array}\right)$$ となる。

$a = 1, b = \dfrac{1}{3}$ のときのみ解を持つ。$x = -z-v+\dfrac{2}{3}, y = -u-w-\dfrac{1}{3}$ となる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-v+2/3 \\ -u-w-1/3 \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&2&1 \\ 1&2&2&2&3&3&2 \\ 1&1&2&3&2&3&2 \\ 2&2&3&4&3&5&a+3 \\ 3&2&3&4&3&5&b+3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(5 行)} \to \text{(5 行)} - \text{(4 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&2&1 \\ 1&2&2&2&3&3&2 \\ 1&1&2&3&2&3&2 \\ 2&2&3&4&3&5&a+3 \\ 1&0&0&0&0&0&b-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(4 行)} \to \text{(4 行)} - \text{(3 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&2&1 \\ 1&2&2&2&3&3&2 \\ 1&1&2&3&2&3&2 \\ 1&1&1&1&1&2&a+1 \\ 1&0&0&0&0&0&b-a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(4 行)} \to \text{(4 行)} - \text{(1 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&2&1 \\ 1&2&2&2&3&3&2 \\ 1&1&2&3&2&3&2 \\ 0&0&0&0&0&0&a \\ 1&0&0&0&0&0&b-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(3 行)} \to \text{(3 行)} - \text{(1 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&2&1 \\ 1&2&2&2&3&3&2 \\ 0&0&1&2&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&a \\ 1&0&0&0&0&0&b-a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2 行)} \to \text{(2 行)} - \text{(1 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&2&1 \\ 0&1&1&1&2&1&1 \\ 0&0&1&2&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&a \\ 1&0&0&0&0&0&b-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(1 行)} \longleftrightarrow \text{(5 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&b-a \\ 0&1&1&1&2&1&1 \\ 0&0&1&2&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&a \\ 1&1&1&1&1&2&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(5 行)} \to \text{(5 行)} - \text{(2 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&b-a \\ 0&1&1&1&2&1&1 \\ 0&0&1&2&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&a \\ 1&0&0&0&-1&1&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(4 行)} \longleftrightarrow \text{(5 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&b-a \\ 0&1&1&1&2&1&1 \\ 0&0&1&2&1&1&1 \\ 1&0&0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(4 行)} \to \text{(4 行)} - \text{(1 行)}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&b-a \\ 0&1&1&1&2&1&1 \\ 0&0&1&2&1&1&1 \\ 0&0&0&0&-1&1&a-b \\ 0&0&0&0&0&0&a \end{array}\right)$$

$a=0$ のとき解を持ち，$x=b, y=u-w-b, z=-2u-2w-b+1, v=w+b$ となる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u-w-b \\ -2u-2w-b+1 \\ u \\ w+b \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ -b+1 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W(A)$ の基底として $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選べる。

演習問題 3.7　次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(4\text{行}) \to (4\text{行}) - (3\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[(3\text{行}) \to (3\text{行}) - (2\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2\text{行}) \to (2\text{行}) - 2 \times (1\text{行})]{}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2\text{行}) \longleftrightarrow (3\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[(3\text{行}) \to (3\text{行}) + 3 \times (2\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(1\text{行}) \to (1\text{行}) - 2 \times (2\text{行})]{}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3\text{行}) \longleftrightarrow (4\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[(2\text{行}) \to (2\text{行}) + (3\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1\text{行}) \to (1\text{行}) - 4 \times (3\text{行})]{}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(4\text{行}) \to (4\text{行}) + 5 \times (3\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & -2 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$$
\xrightarrow[(4\,\text{行}) \to -1/7 \times (4\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 2 & -4 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & -5/7
\end{array}\right)
\xrightarrow[(3\,\text{行}) \to (3\,\text{行}) + (4\,\text{行})]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 2 & -4 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2/7 & 2/7 & -5/7 & 2/7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & -5/7
\end{array}\right)
\xrightarrow[(2\,\text{行}) \to (2\,\text{行}) + (4\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 2 & -4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2/7 & -5/7 & 2/7 & 2/7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2/7 & 2/7 & -5/7 & 2/7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & -5/7
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[(1\,\text{行}) \to (1\,\text{行}) - 6 \times (4\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 6 & -5/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2/7 & -5/7 & 2/7 & 2/7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2/7 & 2/7 & -5/7 & 2/7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & -5/7
\end{array}\right)
$$

よって逆行列は $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ である。

(2)
$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[(3\,\text{行}) \to (3\,\text{行}) - (1\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[(2\,\text{行}) \to (2\,\text{行}) - (1\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[(2\,\text{行}) \to (2\,\text{行}) \longrightarrow (4\,\text{行})]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[(3\,\text{行}) \to (3\,\text{行}) + (2\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[(1\,\text{行}) \to (1\,\text{行}) - (2\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[(4\,\text{行}) \to (4\,\text{行}) + (3\,\text{行})]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[(2\,\text{行}) \to (2\,\text{行}) - (3\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[(4\,\text{行}) \to 1/3 \times (4\,\text{行})]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3
\end{array}\right)
\xrightarrow[(1\,\text{行}) \to (1\,\text{行}) + (4\,\text{行})]{}
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2\,\text{行}) \to (2\,\text{行}) + (4\,\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3\,\text{行}) \to (3\,\text{行}) - 2 \times (4\,\text{行})]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

よって逆行列は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。