線形解析 II 問題解説 #5

河野

演習問題 4.1 $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である事を示せ。この事から (1), (2), (3) を満たせば，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が分かる。

任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ を考える。1 番目の $\boldsymbol{a}$ と 2 番目の $\boldsymbol{a}$ を入れ換えても $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ は同じであるが，(2) より $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = -D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ となる。よって，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$ となる。

基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2$ と表す事ができる。(1),(2) を用いて計算を実行すると

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= D(a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}) \\
&= D(a\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}) + D(c\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}) \\
&= aD(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}) + cD(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}) \\
&= aD(\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) + cD(\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) \\
&= aD(\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1) + aD(\boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_2) + cD(\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1) + cD(\boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_2) \\
&= abD(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + adD(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + cbD(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + cdD(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \\
&= adD(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + bcD(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) \\
&= adD(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) - bcD(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \\
&= D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)(ad - bc) \\
&= D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

となる。

演習問題 4.2 命題 4.1 を証明せよ。

(3) の性質は命題 1.11 ですでに示している。同じ命題 1.11 で外積の多重線型性に関しても述べてある。すなわち次が成立する；$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y}, (\alpha\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = a(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}\times(\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ また内積も多重線型性を持つ。すなわち次が成立する；$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}), (\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'), (\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(1) を順に示していく。

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) &= ((\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_1') \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1' \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + (\boldsymbol{a}_1' \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
\det(\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) &= ((\alpha\boldsymbol{a}_1) \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= (\alpha(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2), \boldsymbol{a}_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_2'), \boldsymbol{a}_3) \\
&= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3) \\
&= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3) \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3) \\
\det(\boldsymbol{a}_1, \alpha\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_1 \times (\alpha\boldsymbol{a}_2), \boldsymbol{a}_3) \\
&= (\alpha(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2), \boldsymbol{a}_3) \\
&= \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_3') &= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_3') \\
&= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3') \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3') \\
\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_3) \\
&= \alpha(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)
\end{aligned}
$$

以上で (1) は示された。(2) の半分はすでに示してあるので，残りを示す。

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) \\
&= (-\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= -(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)
\end{aligned}
$$

演習問題 4.3 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i < j)$ のとき $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ を示せ。

$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ となるが，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ より両者は同じものである。よって $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ より $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ となる。

演習問題 4.4 補題 4.6 の証明を完全なものにせよ。

星印をつけるのを忘れました。この問題は全員対象ではありません。テキスト p88〜も参考にして下さい。そこで述べられている，**置換，互換**という用語を使います。互換の積の順序は 2 通りあって紛らわしいのですが，ここではテキストと同じ順，すなわち写像としてみて自然な順序にします。

(I),(II),(III) の 3 段階に分けて証明する。

(I) $C = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ とおくと，任意の置換 σ に対し

$$F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = C \det(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

が成立する。

置換 σ は互換の積で書き表せる。そのときの互換の積の個数に関する帰納法で示す。互換の個数がゼロ個のとき σ は恒等置換である。すなわち各 i $(i=1,\ldots,n)$ に対し $\sigma(i)=i$ である。このとき式は C の定義そのものである。次に $\sigma=\sigma'\tau$ と書けているとする。ただし τ は i と $i+1$ を入れ換える互換とする。$F(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)})=C\det(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)})$ の成立を仮定して $F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)})=C\det(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$ を示せば帰納法が完成する。(σ' が $k-1$ 個の互換の積で書けているなら，σ は k 個の互換の積で書ける。) τ は $i,i+1$ 以外の j に対しては $\tau(j)=j$, $\tau(i)=i+1,\tau(i+1)=i$ である。よって

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) &= F(\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(n)}) \\
&= F(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)}) \\
&= F(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)}) \\
&= -F(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)}) \\
&= -C\det(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)}) \\
&= C\det(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)}) \\
&= C\det(\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma'\tau(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma'(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma'(n)}) \\
&= C\det(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(i-1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma(i+1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(i+2)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)})
\end{aligned}
$$

となり (I) が示された。

(II) $a(1),\ldots,a(n)$ を 1 から n までの整数のどれかとする。ただし重複を許すものとする。このとき

$$F(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})=C\det(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})$$

が成立する。

$a(1),\ldots,a(n)$ が重複していない場合は (I) で示した。重複している場合は演習問題 4.3 と同様にして $F(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})=0$ を示す事ができる。よってこの場合も $F(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})=0=\det(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})$ となり，(II) が成立する。

(III) 補題 4.6 が成立する。

$\boldsymbol{a}_1=\sum_{j_1}a_{j_11}\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{a}_n=\sum_{j_n}a_{j_nn}\boldsymbol{e}_{j_n}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= F(\sum_{j_1}a_{j_11}\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\sum_{j_n}a_{j_nn}\boldsymbol{e}_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}F(a_{j_11}\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,a_{j_nn}\boldsymbol{e}_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}F(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}C\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}C\det(a_{j_11}\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,a_{j_nn}\boldsymbol{e}_{j_n})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C\det(\sum_{j_1} a_{j_1 1}\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\sum_{j_n} a_{j_n n}\boldsymbol{e}_{j_n}) \\
&= C\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)
\end{aligned}
$$

これ以降は小さな文字で書かれている部分の演習問題なので，すべてに星印がついていると考えて下さい。

演習問題 4.5　テキストを参考にして定理 4.10 を証明せよ。

ここではテキストと違う証明を与えておく

n は 1 つ固定して考える。変数 $X_1,\ldots,X_n$ を用意し $F=\prod_{i<j}(X_i-X_j)$ とする。ただし $\prod$ は $i<j$ となるすべての i,j について X_i-X_j をかけてえられる式とする。例えば $n=3$ のときは $F=(X_1-X_2)(X_1-X_3)(X_2-X_3)$ である。置換 σ に対し $F^\sigma=\prod_{i<j}(X_{\sigma(i)}-X_{\sigma(j)})$ とおくと，$F^\sigma=\pm F$ となる。このとき $F^\sigma=\operatorname{sgn}(\sigma)F$ とおく。$F^{(\sigma\tau)}=(F^\tau)^\sigma$ なので $(\operatorname{sgn}(\tau)F)^\sigma=\operatorname{sgn}(\tau)F^\sigma=\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)F$ となるが，$F^{\sigma\tau}=\operatorname{sgn}(\sigma\tau)F$ なので $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ となる。また互換 τ にたいしては $\operatorname{sgn}(\tau)=-1$ となる。

以上のことから置換 σ が互換 $\tau_1,\ldots,\tau_k$ の積で書けていた場合，$\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\tau_1\cdots\tau_k)=\operatorname{sgn}(\tau_1)\cdots\operatorname{sgn}(\tau_k)=(-1)\cdots(-1)=(-1)^k$ となる。k が偶数か奇数かは $\operatorname{sgn}(\sigma)$ によって定まっている。

演習問題 4.6　$n=3$ の場合定義 4.11 を具体的に書き下せ。

置換 σ を $(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$ で表す。すなわち $\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$ と書く。置換をすべてリストアップすると，$\sigma_1=(1,2,3),\sigma_2=(1,3,2),\sigma_3=(2,1,3),\sigma_4=(2,3,1),\sigma_5=(3,1,2).\sigma_6=(3,2,1)$ である。次に sgn を求める。例えば σ_4 の場合 $F^{\sigma_4}=(X_{\sigma_4(1)}-X_{\sigma_4(2)})(X_{\sigma_4(1)}-X_{\sigma_4(3)})(X_{\sigma_4(2)}-X_{\sigma_4(3)})=(X_2-X_3)(X_2-X_1)(X_3-X_1)=(X_2-X_3)(X_1-X_2)(X_1-X_3)=(X_1-X_2)(X_1-X_3)(X_2-X_3)=F$ となる。よって σ_4 に対応する項 $\operatorname{sgn}(\sigma_4)a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)}$ は $a_{12}a_{23}a_{31}$ となる。これを 6 個の置換それぞれに対し求めて加えると

$$
\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}
$$

となる。

演習問題 4.7　ここで定義した $\det(A)$ が定義 4.3 の (1) 多重線型性,(2) 交代性,(3) 単位の値を満たす事を示せ (テキスト参照の事)。

少し失敗してしまいました。この定義では性質を示すのが少し厄介なので，テキストの定義に変形できる事を示します。テキストの定義は

$$
\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}
$$

です。

置換 σ の逆置換 $\tau=\sigma^{-1}$ を用いて $\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ を書き直す。各 i に対して，$\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$ の中には i になるものがあるので，それを β_i とすると，$i=\sigma(\beta_i)$ である。τ は σ の逆置換 (逆写像) なので $\tau(i)=\tau(\sigma(\beta_i))=\beta_i$ となる。よって $a_{\beta_i\sigma(\beta_i)}=a_{\tau(i)i}$ となる。$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ では β_i が 1 から n の順で並んでいるが，$a_{\tau(i)i}$ の i の順に並べ替えると，$a_{\tau(1)1}\cdots a_{\tau(n)n}$ になる。$\tau\sigma$ は恒等置換なので，$\operatorname{sgn}(\tau\sigma)=1$ である。$\operatorname{sgn}(\tau\sigma)=\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$

なので，$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ のとき $\mathrm{sgn}(\tau)=1$，$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ のとき $\mathrm{sgn}(\tau)=-1$ となる。よって $\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau)$ である。

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{\tau(1)1}\cdots a_{n\tau(n)}
\end{aligned}
$$

となるが，σ と τ は一対一に対応するので和の部分を $\det(A)=\displaystyle\sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{\tau(1)1}\cdots a_{n\tau(n)}$ と書き換える事ができて，変形が完了する。

この形なら証明は難しくありません。$\boldsymbol{a}_i=\displaystyle\sum_{j_i}a_{j_ii}\boldsymbol{e}_{j_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, $\boldsymbol{a}'_i=\displaystyle\sum_{j_i}a'_{j_ii}\boldsymbol{e}_{j_i}$ とおく。

(1) **多重線型性**：

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}'_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots(a_{\sigma(i)i}+a'_{\sigma(i)i})\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\Big(\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n}+\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n}\Big) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n}+\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}'_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n) \\
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots\alpha a_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \alpha\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \alpha\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n)
\end{aligned}
$$

(2) **交代性**： 互換 τ を $\tau=(i,i+1)$ とする。

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_{\tau(1)},\ldots,\boldsymbol{a}_{\tau(i)},\boldsymbol{a}_{\tau(i+1)},\ldots,\boldsymbol{a}_{\tau(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma\tau(1)1}\cdots a_{\sigma\tau(i)i}a_{\sigma\tau(i+1)i+1}\cdots a_{\sigma\tau(n)n}
\end{aligned}
$$

ここで $\sigma'=\sigma\tau$ とおく。τ は互換なので $\mathrm{sgn}(\tau)=-1$ なので，$\mathrm{sgn}(\sigma')=\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)=-\mathrm{sgn}(\sigma)$ となる。よって

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma\tau(1)1}\cdots a_{\sigma\tau(i)i}a_{\sigma\tau(i+1)i+1}\cdots a_{\sigma\tau(n)n} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma')a_{\sigma'(1)1}\cdots a_{\sigma'(i)i}a_{\sigma'(i+1)i+1}\cdots a_{\sigma'(n)n}
\end{aligned}
$$

となる。σ と σ' は一対一に対応するので和の部分を $-\displaystyle\sum_{\sigma'\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma')a_{\sigma'(1)1}\cdots a_{\sigma'(i)i}a_{\sigma'(i+1)i+1}\cdots a_{\sigma'(n)n}$ と変形できて証明が完了する。

(3) **基本ベクトルに対する値**：

$A=(a_{ij})$ を単位行列とする。すなわち $a_{ij}=\delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) とする。$\sigma\in S_n$ について $\sigma(1)\neq 1$ とすると $a_{\sigma(1)1}=0$ である。よって $\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ の項は 0 となる。$\sigma(1)\neq 1$ の項は和には関係ないので $\sigma(1)=1$ となる S_n の元に関してのみ和をとればよい。$S_n^{(1)}=\{\sigma\in S_n \mid \sigma(1)=1\}$ とすると

$$\det(E)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}=\sum_{\sigma\in S_n^{(1)}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

となる。同様に $\sigma(2)\neq 2$ のとき $\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ の項は 0 となる。$S_n^{(2)}=\left\{\sigma\in S_n^{(1)}\ \middle|\ \sigma(2)=2\right\}$ とおくと

$$\det(E)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}=\sum_{\sigma\in S_n^{(1)}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}=\sum_{\sigma\in S_n^{(2)}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

となる。以下同様に $S_n^{(3)}=\left\{\sigma\in S_n^{(2)}\ \middle|\ \sigma(3)=3\right\},\ldots,S_n^{(n)}=\left\{\sigma\in S_n^{(n-1)}\ \middle|\ \sigma(n)=n\right\}$ とおくと

$$\det(E)=\sum_{\sigma\in S_n^{(n)}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

となる。$S_n^{(n)}$ に属する元は恒等置換 σ_0 のみであり，任意の i $(i=1,\ldots,n)$ に対し $\sigma_0(i)=i$ となっている。よって

$$\det(E)=\sum_{\sigma\in S_n^{(n)}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}=\mathrm{sgn}(\sigma_0)a_{\sigma_0(1)1}\cdots a_{\sigma_0(n)n}=a_{11}\cdots a_{nn}$$

となり $a_{11}=\cdots=a_{nn}=1$ より $\det(E)=1$ を得る。