線形解析 II 問題解説 #6

河野

演習問題 4.8　テキストから 4 次行列の行列式を計算する問題を 2 つ選び計算せよ。

この問題はどの行列選ぶかによるので，解答はしません。ただしこの種の問題は**確実に**できるようにしておいて下さい。

演習問題 4.9　次の行列が逆行列を持つ時はそれを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ただし，a,b,c,d は自分の学生番号の下 4 桁。

逆行列が存在しない人はラッキーです。その場合は行列式を計算して，0 である事をチェックすればそれでよい。出席番号 10 番で最後の数字が 3 の人はその様です。

対応する学生番号がなさそうな，出席番号 100 番，最後の数字 0 の場合の，解答を与えておく。すなわち $(a,b,c,d) = (1,0,0,0)$ とする。以前やった基本変形を用いる方法の方が簡単であるが，ここではこの節で取り上げた方法で求める。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ を計算すると 4 である。よって A の逆行列は存在する。$\tilde{a}_{ij}$ を順に計算して行く。

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

以下同様に計算すると $\tilde{a}_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ \tilde{a}_{14} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$\tilde{a}_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3,\ \tilde{a}_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \tilde{a}_{24} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \tilde{a}_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ \tilde{a}_{34} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

$\tilde{a}_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4,\ \tilde{a}_{42} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,\ \tilde{a}_{43} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ \tilde{a}_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ な

ので

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} & \widetilde{a}_{41} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} & \widetilde{a}_{42} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} & \widetilde{a}_{43} \\ \widetilde{a}_{14} & \widetilde{a}_{24} & \widetilde{a}_{34} & \widetilde{a}_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 4.10　次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。ただし a, b は自分の学生番号の下 2 桁。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

行列式を計算して 0 でなければ 1 次独立，0 であれば 1 次独立ではありません。

演習問題 4.11　この節の方法でテキストから 2 題問題を選び，行列式を計算せよ。ただし 4 次以上とする。

演習問題 3.15 と同じです。この方法でも出来るようにしておいて下さい。