線形解析 II 問題解説 #7

河野

演習問題 5.1　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^3 = 0$ なので，固有値は 0 である。0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき $y = 0, z = 0, 0 = z$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶ事ができる。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ -2 & t-1 & -2 \\ -3 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - 3t^2 - 14t - 8 = (t+2)\left(t - \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\right)\left(t - \dfrac{5-\sqrt{41}}{2}\right) = 0$ なので，固有値は $-2, \dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ である。-2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき $x + z = 0, y = 0$ が成立している。ここは方程式の理論を理解しているものとして，計算過程の叙述を省略している。各自計算する事。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ事ができる。

$\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき

$x=z, \dfrac{3-\sqrt{41}}{2}x+2y=0$ が成立している。よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ -\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3-\sqrt{41}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ事ができる。

$\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \dfrac{5-\sqrt{41}}{2}\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき $x=z, \dfrac{3+\sqrt{41}}{2}x+2y=0$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3+\sqrt{41}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ事ができる。

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE-A) = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = (t+1)(t-1)^2 = 0$ なので，固有値は $1, -1$ である。-1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき $x=-z, y=0$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ事ができる。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成立している。このとき $x=z$ が成立している。よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ事ができる。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である様に選んだ。

演習問題 5.2　次の行列を対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) これは 5.2 節で取り上げているので省略。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式が $\Phi_A(t) = \det(tE-A) = t^3-6t^2+11t-6 = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$ なので，固有値は $1, 2, 3$ である。1 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，2 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，3 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である。$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則であり，$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となり対角化される。

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式が $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2)$ なので，固有値は $0, 1, 2$ である。0 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，1 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，2 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である。$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則であり，$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となり対角化される。