線形解析 II 問題解説 #8

河野

演習問題 5.3　補題 5.8 及び命題 5.7 を証明せよ。

補題 5.8 : 最初に「あるゼロでないベクトル x が存在して $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $\det(B) = 0$」を示す。結論を否定すると $\det(B) \neq 0$ なので B には逆行列 B^{-1} が存在する。$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の左から B^{-1} をかけると，$B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるが，$B^{-1}B = E$ なので $B^{-1}B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるが，これは矛盾である。

次に「$\det(B) = 0$ ならばあるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」を示す。行列 B のサイズを n とすると $B = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ と書ける。$\det(B) = 0$ より $\mathrm{rank}(B) < n$ となり，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ は 1 次独立ではない。よってスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと，$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{b}_n = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ となるので証明が終る。

命題 5.7 : λ を $\Phi_A(t) = 0$ の解で $\lambda \in \boldsymbol{K}$ とする。このとき $\det(\lambda E - A) = \Phi_A(\lambda) = 0$ なので補題 5.8 より，あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。このとき $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるので，λ が A の固有値である事が分かる。

逆に λ が A の固有値のとき，ゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる。$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$ なので，$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，$\Phi_A(\lambda) = 0$ となる。$\lambda \in \boldsymbol{K}$ は固有値の定義より明らか。明らかという言葉は学生は使用してはいけない。ここの部分はきちんと書く事。よって証明が終る。

演習問題 5.4　次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^4 = 0$ なので，固有値は 0 である。

0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$y = z = w = 0$ が成立している。よって固有ベクトルは

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+1) = 0$ なので，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合に分ける必要がある。最初に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合を考える。このとき固有値は $1, -1$ である。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$x = y = z = w$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。-1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$x = -y = z = -w$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

次に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合を考える。このとき固有値は $1, -1, i, -i$ である。1 及び -1 に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合と全く同じである。i に対応する固有べを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$y = ix, z = iy, w = iz, x = iw$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ ix \\ -x \\ -ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。$-i$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$y = -ix, z = -iy, w = -iy, x = -iw$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ -x \\ ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE-A) = t^4-2t^2+1 = (t-1)^2(t+1)^2 = 0$ なので固有値は $1, -1$ である。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$w = x, z = y$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に 1 次独立な固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。-1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$w = -x, z = -y$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に 1 次独立な固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

演習問題 5.5　命題 5.9 を証明せよ。

A が対角化可能であるとする。P を正則行列で，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となるものとする。$P = (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)$ とおくと，$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となる。$AP = A(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n) = (A\boldsymbol{u}_1 \cdots A\boldsymbol{u}_n)$ かつ $(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{u}_n)$ より，各 i $(i = 1, \ldots, n)$ について $A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i\boldsymbol{u}_i$ となる。よって各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $\boldsymbol{u}_i$ は固有ベクトルである。また P が正則なことから $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である。

逆に n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が存在するとする。$P = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ とおくとき，P は正則

である。また

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (A\boldsymbol{u}_1, \ldots, A\boldsymbol{u}_n) \\ &= (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \ldots, \lambda_n \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので，A は対角化可能である。

演習問題 5.6　次の行列が対角化可能かどうか調べよ。ただし $\boldsymbol{K}$ は実数の場合と複素数の場合の 2 通りの場合を調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(1)，(3) については演習の時間にふれたので，ここでは (2) のみ調べる。$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。A の固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1) = 0$ である。

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合固有値は 1 のみである。1 は重解ではないので固有ベクトルで 1 次独立なものは 1 個しか存在しない。1 次独立なベクトルが 3 個存在する事はないので対角化不可能である。

次に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合を考える。固有方程式は $\Phi_A(t) = (t-1)(t-i)(t+i) = 0$ なので，固有値は $1, i, -i$ の 3 つである。各固有値に対応する固有ベクトルは少なくとも 1 個存在する。$1, i, -i$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ である。異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立なので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である。よって A は対角化可能である。

演習問題 5.7　演習問題 5.4 の行列に対し $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合と $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の 2 つの場合に対角化を試みよ。対角化不可能な場合は理由も述べること。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。演習問題 5.4 のとき求めた様に A の固有値は 1 のみであり 4 重解であるが，それに属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしており，1 次独立なものは 1 個しか選べない。A が対角化できる必要十分条件は 1 次独立な固有ベクトルが 4 個存在する事なので，A は対角化不可能である。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。最初に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合を考える。固有値は $1, -1$ の 2 つであり，1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$，$-1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。1 次独立な固有ベクトルは，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の様に 2 個しか選べない。A が対角化できる必要十分条件は 1 次独立な固有ベクトルが 4 個存在する事なので，A は対角化不可能である。

次に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合を考える。演習問題 5.4 のときに求めた様に $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立な固有ベクトルである。$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則で，$P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix}$ となり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

となる。

(3) A$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。演習問題 5.4 で求めたように $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立な固有ベクトルである。$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則で，$P^{-1} =$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ となり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。