

6 線型微分方程式

演習問題 6.1 次の条件の下で微分方程式を立てよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。 P における法線が x 軸と交わる点を N , P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。 P における接線が x 軸と交わる点を S , y 軸と交わる点を T とすると点 P は線分 ST の中点である。
- (3) 空中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k , 重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。

(1) 点 $P(x, y)$ における接線の方程式は $Y = y'(X - x) + y$ なので, 法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$$

である。 N は法線上の点なので座標を $(x_0, 0)$ とすると, $0 = -\frac{1}{y'}(x_0 - x) + y$ が成立する。今 $x_0 - x$ が一定なのでこれを C (定数) とおくと微分方程式

$$y'y = C$$

を得る。

(2) 接線の方程式は (1) と同様で

$$Y = y'(X - x) + y$$

である。 T の座標は $(0, 2y)$ なので $2y = y'(0 - x) + y$ 満たすべき微分方程式は

$$y'x + y = 0$$

である。

(3) 運動方程式は力を F 加速度を a 質量を m としたとき

$$F = ma$$

であった。下向きを正の方向にとると働く力は重力と空気の抵抗力なので, $F = mg - kv^2$ となる。よって求める微分方程式は

$$mg - kv^2 = mv'$$

である。

演習問題 6.2 次の微分方程式を解け。

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $yy' + x = 0$ | (2) 演習問題 6.1 (1) で得られた微分方程式 |
| (3) 演習問題 6.1 (2) で得られた微分方程式 | (4) 演習問題 6.1 (3) で得られた微分方程式 |

ここは変数分離型で解く。

(1) $y \frac{dy}{dx} + x = 0$ なので, $ydy = -x dx$ となる。両辺を積分して, $\int ydy = -\int x dx$ より $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$ を得る。よって

$$x^2 + y^2 = 2C$$

を得る。

(2) $y \frac{dy}{dx} = C$ より $ydy = C dx$ を積分して, $\frac{1}{2}y^2 = Cx + C_1$ となる。よって

$$y = \pm \sqrt{Cx + C_1}$$

を得る。

(3) $x \frac{dy}{dx} + y = 0$ より $\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$ を積分して, $\log |y| = -\log |x| + C_1$ となる。 $C_1 = \log C$ とおくと,

$\log |y| = \log \frac{C}{|x|}$ となる。よって

$$y = \pm \frac{C}{x}$$

を得る。

(4) $mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}$ より $\frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv = dt$ となり,

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v} \right) dv = dt$$

と変形して積分すると,

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \log \left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v \right) - \sqrt{\frac{m}{k}} \log \left| \sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v \right| \right) = t + C_1$$

を得る。初期値を $v = 0$ と考えると $\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v > 0$ と仮定できるので, 絶対値をはずして変形すると,

$$\log \left(\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} \right) = 2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)$$

となるので,

$$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} = \exp \left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1) \right)$$

となる。よって

$$v = \sqrt{g} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\exp\left(2\sqrt{g} \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)\right) - 1}{\exp\left(2\sqrt{g} \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)\right) + 1}$$

を得る。 $t \rightarrow \infty$ としたとき $v \rightarrow \sqrt{g} \sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。よってこの条件下では落下速度は $\sqrt{g} \sqrt{\frac{m}{k}}$ を超えない。