線形解析 II 問題解説 #10

河野

演習問題 6.3　次の微分方程式を解け。できれば命題 6.5 及び命題 6.6 を用いないで，演算子法を用いて示せ。

(1) $y' + y\sin x = 0$　　(2) $y' + (x+1)y = 0$
(3) $y' + e^{2x}y = 0$　　(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(5) $y'' - y' - 6y = 0$　　(6) $y'' + y = 0$
(7) $y'' + y = 0$　　(8) $y'' - 2y' + y = 0$
(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

微分方程式では解が求まったら，元の微分方程式に代入して解が正しいかどうかを必ずチェックする事。

演算子法で基本的な関係式は，独立変数が x の場合 $Q(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ のとき

$$(D - p(x)) = e^{Q(x)} D e^{-Q(x)}$$

である。特に $p(x)$ が定数 λ のときは

$$D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$$

となる (これが命題 6.5 の内容)。演習問題では「できればこれを用いずに解け」という指定をした。それはこの式を忘れた場合を想定してである。この式を忘れた場合導けるようにしておく事は大切である。ここでその導き方を説明して後ろの解答そのものは命題 6.5 を用いる形で述べておく。 指数関数をかけるという形になっている事はおぼろげながら覚えているという事を前提にする。そのとき冪部分を $R(x)$ とすると $u = e^{R(x)}y$ を微分してみる。

$$\begin{aligned} Du &= D\left(e^{R(x)}y\right) = R'(x)e^{R(x)}y + e^{R(x)}y' \\ &= e^{R(x)}y' + e^{R(x)}R'(x)y = e^{R(x)}(Dy + R'(x)y) \\ &= e^{R(x)}(D + R'(x))y \end{aligned}$$

となる。与えられた微分方程式は $y' + y\sin x = (D + \sin x)y = 0$ なので，両式を比較すると $R'(x) = \sin x$ となる $R(x)$ を選べばよい。よって $R(x) = \displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$ とする。このとき y を微分方程式の解関数とすると，$Du = e^{-\cos x}(D + \sin x)y = 0$ が成立する。これを積分して $u = C$ が得られる。$u = e^{-\cos x}y$ なので

$$y = Ce^{\cos x}$$

となる。

(1) 演算子 D を用いて微分方程式を書き直すと $Dy + \sin x\, y = 0$ なので $(D - (-\sin x))y = 0$ となる。$Q(x) = \displaystyle\int -\sin x dx = \cos x$ となるので，微分方程式は $e^{\cos x}De^{-\cos x}y = 0$ となる。両辺に $e^{-\cos x}$ をかけると $De^{-\cos x}y = 0$ となるので，両辺を積分して $e^{-\cos x}y = C$ を得る。両辺に $e^{\cos x}$ をかけて

$$y = Ce^{\cos x}$$

を得る。

(2) 演算子 D を用いて微分方程式を書き直すと $Dy + (x+1)y = 0$ なので $(D + x + 1)y = 0$ となる。$Q(x) = \displaystyle\int -(x+1)dx = -\frac{(x+1)^2}{2}$ となるので，微分方程式は $\exp\left(-\dfrac{(x+1)^2}{2}\right) D \exp\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right) y = 0$ となる。両

辺に $\exp\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)$ をかけると $D\exp\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)y=0$ となるので，両辺を積分して $\exp\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)y=C$ を得る。両辺に $\exp\left(-\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)$ をかけて

$$y=C\exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)$$

を得る。

(3) 演算子 D を用いて微分方程式を書き直すと $Dy+e^{2x}y=0$ なので $(D+e^{2x})y=0$ となる。$Q(x)=\displaystyle\int -e^{2x}dx=-\dfrac{1}{2}e^{2x}$ となるので，微分方程式は $\exp\left(-\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)y=(D+e^{2x})y=0$ となる。両辺に $\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると $D\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)y=0$ となるので，両辺を積分して $\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)y=C$ を得る。両辺に $\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけて

$$y=C\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

を得る。

(4) $y''-5y'+6y=D^2y-5Dy+6y=(D^2-5D+6)y=(D-2)(D-3)y$ と変形できる。$z=(D-3)y$ とおくと，微分方程式は $(D-2)z=0$ となる。$D-2=e^{2x}De^{-2x}$ なので $e^{2x}De^{-2x}z=0$ となり，$De^{-2x}z=0$ を得る。両辺を積分すると $e^{-2x}z=C_1$ となるので

$$z=C_1e^{2x}$$

を得る。

$z=(D-3)y$ かつ $D-3=e^{3x}De^{-3x}$ なので y は微分方程式

$$e^{3x}De^{-3x}y=C_1e^{2x}$$

を満たす。$De^{-3x}y=C_1e^{-x}$ と変形して，積分すると $e^{-3x}y=-C_1e^{-x}+C_2$ となり，

$$y=-C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

を得る (係数を置き直して $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ としてもよい)。

(5) $y''-y'-6y=D^2y-Dy-6y=(D^2-D-6)y=(D-3)(D+2)y$ と変形できる。$z=(D+2)y$ とおくと，微分方程式は $(D-3)z=0$ となる。$D-3=e^{3x}De^{-3x}$ なので $e^{3x}De^{-3x}z=0$ となり，$De^{-3x}z=0$ を得る。両辺を積分すると $e^{-3x}z=C_1$ となるので

$$z=C_1e^{3x}$$

を得る。

$z=(D+2)y$ かつ $D+2=e^{-2x}De^{2x}$ なので y は微分方程式

$$e^{-2x}De^{2x}y=C_1e^{3x}$$

を満たす。$De^{2x}y=C_1e^{5x}$ と変形して，積分すると $e^{2x}y=\dfrac{C_1}{5}e^{5x}+C_2$ となり，

$$y=\frac{C_1}{5}e^{3x}+C_2e^{-2x}$$

を得る (係数を置き直して $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$ としてもよい)。

(6) $y''+y=D^2y+y=(D^2+1)y=(D-i)(D+i)y$ と変形できる。$z=(D+i)y$ とおくと，微分方程式は $(D-i)z=0$ となる。$D-i=e^{ix}De^{-ix}$ なので $e^{ix}De^{-ix}z=0$ となり，$De^{-ix}z=0$ を得る。両辺を積分すると $e^{-ix}z=C_1$ となるので

$$z=C_1e^{ix}$$

を得る。

$z=(D+i)y$ かつ $D+i=e^{-ix}De^{ix}$ なので y は微分方程式

$$e^{-ix}De^{ix}y=C_1e^{ix}$$

を満たす。$De^{ix}y=C_1e^{2ix}$ と変形して，積分すると $e^{ix}y=\dfrac{C_1}{2i}e^{2ix}+C_2$ となり，

$$y=\frac{C_1}{2i}e^{ix}+C_2e^{-ix}$$

を得る (係数を置き直して $y=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$ としてもよい)。

(7) 間違えました。前問と同じ問題ですね。

(8) $y''-2y'+y=D^2y-2Dy+y=(D^2-2D+1)y=(D-1)^2y=0$ となる。$z=(D-1)y$ とおくと $(D-1)z=0$ である。$e^xDe^{-x}=D-1$ なので $e^xDe^{-x}z=0$ となる。両辺に e^{-x} をかけて $De^{-x}z=0$ を得る。両辺を積分して，$e^{-x}z=C_1$ を得るので

$$z=C_1e^x$$

となる。$z=(D-1)y$ だったので，$(D-1)y=C_1e^x$ となり，

$$e^xDe^{-x}y=C_1e^x$$

を得る。$De^{-x}y=C_1$ の両辺を積分して $e^{-x}y=C_1x+C_2$ となるので

$$y=C_1xe^x+C_2e^x$$

を得る。

(9) $y''+4y'+4y=D^2y+4Dy+4y=(D^2+4D+4)y=(D+2)^2y=0$ となる。$z=(D+2)y$ とおくと $(D+2)z=0$ である。$e^{-2x}De^{2x}=D+2$ なので $e^{-2x}De^{2x}z=0$ となる。両辺に e^{2x} をかけて $De^{2x}z=0$ を得る。両辺を積分して，$e^{2x}z=C_1$ を得るので

$$z=C_1e^{-2x}$$

となる。$z=(D+2)y$ だったので，$(D+2)y=C_1e^{-2x}$ となり，

$$e^{-2x}De^{2x}y=C_1e^{-2x}$$

を得る。$De^{2x}y=C_1$ の両辺を積分して $e^{2x}y=C_1x+C_2$ となるので

$$y=C_1xe^{-2x}+C_2e^{-2x}$$

を得る。

演習問題 6.4　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。できれば命題 6.7 を用いないで，命題 6.6 の形から導け。

(1) $y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega \in \boldsymbol{R})$　　　(2) $y'' + y' + y = 0$

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$

最初に複素数値関数の範囲で微分方程式の解関数を求める。求まった関数の中から実数値関数を探す事を考える。 複素数値関数の解関数は前の問題と同様なので解答は省略する。その解関数が得られたとして後を説明する。

(1) $\omega = 0$ の場合は容易なので $\omega \neq 0$ を仮定する。 $y'' + \omega^2 y = 0$ の複素数値関数の範囲での一般解は $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ となる。$e^{\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$，$e^{-\omega x} = \cos\omega x - i\sin\omega x$ なので，$C_1 = \dfrac{1}{2}, C_2 = \dfrac{1}{2}$ とおくと，特殊解として $y_1 = \cos\omega x$ を得る。$C_1 = \dfrac{1}{2i}, C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ とおくと，特殊解として $y_2 = \sin\omega x$ を得る。C_1, C_2 を任意の実数とすると $y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ は微分方程式の解関数である実数値関数になっている。**これが一般解である事を示せば**証明が終わる。z を微分方程式の解になっている任意の実数値関数とする。$y = z(0)\cos\omega x + \dfrac{z'(0)}{\omega}\sin\omega x$ とおくと，$y(0) = z(0)$,$y'(0) = z'(0)$ となるので，y, z は微分方程式の解関数であって，同じ初期値を持つ。微分方程式の解関数の一意性より $z = y$ が分かる。以上で微分方程式の任意の解関数は $y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ の形をしている事が分かる。

(2) $y'' + y' + y = 0$ の複素数値関数の範囲での一般解は $y = C_1\exp\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\exp\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$ となる。

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\ \exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

なので，$C_1 = \dfrac{1}{2}, C_2 = \dfrac{1}{2}$ とおくと，特殊解として $y_1 = \exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ を得る。$C_1 = \dfrac{1}{2i}, C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ とおくと，特殊解として $y_2 = \exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ を得る。C_1, C_2 を任意の実数とすると

$$y = C_1\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は微分方程式の解関数である実数値関数になっている。**これが一般解である事を示せば**証明が終わる。z を微分方程式の解になっている任意の実数値関数とする。$y = z(0)\exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{2z'(0)+z(0)}{\sqrt{3}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ とおくと，$y(0) = z(0)$,$y'(0) = z'(0)$ となるので，y, z は微分方程式の解関数であって，同じ初期値を持つ。微分方程式の解関数の一意性より $z = y$ が分かる。以上で微分方程式の任意の解関数は $y = C_1\exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ の形をしている事が分かる。

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$ の複素数値関数の範囲での一般解は $y = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}$ となる。

$$\begin{aligned}e^{(1+i)x} &= e^x(\cos x + i\sin x)\\ e^{(1-i)x} &= e^x(\cos x - i\sin x)\end{aligned}$$

なので，$C_1=\dfrac{1}{2}, C_2=\dfrac{1}{2}$ とおくと，特殊解として $y_1=e^x\cos x$ を得る。$C_1=\dfrac{1}{2i}, C_2=-\dfrac{1}{2i}$ とおくと，特殊解として $y_2=e^x\sin x$ を得る。C_1, C_2 を任意の実数とすると

$$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$$

は微分方程式の解関数である実数値関数になっている。**これが一般解である事を示せば**証明が終わる。z を微分方程式の解になっている任意の実数値関数とする。$y=z(0)e^x\cos x+(z'(0)-z(0))e^x\sin x$ とおくと，$y(0)=z(0)$,$y'(0)=z'(0)$ となるので，y,z は微分方程式の解関数であって，同じ初期値を持つ。微分方程式の解関数の一意性より $z=y$ が分かる。以上で微分方程式の任意の解関数は $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$ の形をしている事が分かる。

演習問題 6.5　次の微分方程式を (1) 特殊解予想，(2) 演算子法，(3) 定数変化法の 3 通りの方法で解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx}-3y=e^{2x}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}+2y=\sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx}+3y=x^2+x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=x+4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=\sin x$　　(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=e^{2x}$

(1) [**特殊解予想**] 与えられた微分方程式を (A) とし，その同次型 $\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ を (B) とおくと，

$$(A)\text{ の一般解}=(B)\text{ の一般解}+(A)\text{ の特殊解}$$

が成立しているので，(B) の一般解と (A) の特殊解を求める。(B) の一般解は $y=Ce^{3x}$ という形をしている。(ここではこの解法を省略するが，方法はどれでもよいから各自解く事。) (A) の特殊解を求めるが，この解が $y=Ae^{2x}$ の形をしていると予想する。(A) に代入して $2Ae^{2x}-3Ae^{2x}=e^{2x}$ を得る。よって $A=-1$ のとき y は微分方程式 (A) の特殊解になる。よって (A) の一般解は

$$y=Ce^{3x}-e^{2x}$$

である。

[**演算子法**] 微分方程式は $y'-3y=Dy-3y=(D-3)y=e^{2x}$ の形をしている。$e^{3x}De^{-3x}=D-3$ なので，$e^{3x}De^{-3x}y=e^{2x}$ となり，$De^{-3x}y=e^{-x}$ を得る。両辺を積分すると，$e^{-3x}y=-e^{-x}+C$ となるので

$$y=Ce^{3x}-e^{2x}$$

となる。

[**定数変化法**] $\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ の一般解は $y=Ce^{3x}$ の形をしている。前と同様この解法は省略。各自解く事。 与えられた微分方程式の解関数は，$C(x)$ を関数として $y=C(x)e^{3x}$ という形をしていると仮定する。元の微分方程式に代入すると，$C'(x)e^{3x}+3C(x)e^{3x}-3C(x)e^{3x}=e^{2x}$ となり $C'(x)=e^{-x}$ が得られる。積分して $C(x)=C-e^{-x}$ となるので

$$y=Ce^{3x}-e^{2x}$$

を得る。これが一般解である事は演習問題 6.4 と同様の方法で分かる。

(2) [**特殊解予想**] 与えられた微分方程式を (A) とし，その同次型 $\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ を (B) とおくと，

$$(A)\text{ の一般解}=(B)\text{ の一般解}+(A)\text{ の特殊解}$$

が成立しているので，(B) の一般解と (A) の特殊解を求める。(B) の一般解は $y=Ce^{-2x}$ という形をしている。(ここではこの解法を省略するが，方法はどれでもよいから各自解く事。) (A) の特殊解を求めるが，この解が $y=A\sin x+B\cos x$ の形をしていると予想する。(A) に代入して $(2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x=sinx$ を得る。この式が恒等的に成り立つためには $2A-B=1, A+2B=0$ が必要十分である。よって $A=\dfrac{2}{5}, B=-\dfrac{1}{5}$ が得られ，$y=\dfrac{2}{5}\sin x-\dfrac{1}{5}\cos x$ は微分方程式 (A) の特殊解になる。よって (A) の一般解は

$$y=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$$

である。

[**演算子法**] 微分方程式は $y'+2y=Dy+2y=(D+2)y=\sin x$ の形をしている。$e^{-2x}De^{2x}=D+2$ なので，$e^{-2x}De^{2x}y=\sin x$ となり，$De^{2x}y=e^{2x}\sin x$ を得る。両辺を積分すると[(1)](積分計算は省略。各自実行する事。)，

$$e^{2x}y=e^{2x}\left(\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x\right)+C$$

となるので

$$y=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$$

となる。

[**定数変化法**] $\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ の一般解は $y=Ce^{-2x}$ の形をしている。(前と同様この解法は省略。各自解く事。) 与えられた微分方程式の解関数は，$C(x)$ を関数として $y=C(x)e^{-2x}$ という形をしていると仮定する。元の微分方程式に代入すると，$C'(x)e^{-2x}-2C(x)e^{-2x}+2C(x)e^{-2x}=\sin x$ となり $C'(x)=e^{2x}\sin x$ が得られる。積分して (積分計算は省略。各自実行する事。)，$C(x)=e^{2x}\left(\dfrac{2}{5}\sin x-\dfrac{1}{5}\cos x\right)+C$ となるので

$$y=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$$

を得る。これが一般解である事は演習問題 6.4 と同様の方法で分かる。

(3) [**特殊解予想**] 与えられた微分方程式を (A) とし，その同次型 $\dfrac{dy}{dx}+3y=0$ を (B) とおくと，

$$(A)\text{ の一般解} = (B)\text{ の一般解} + (A)\text{ の特殊解}$$

が成立しているので，(B) の一般解と (A) の特殊解を求める。(B) の一般解は $y=Ce^{-3x}$ という形をしている。(ここではこの解法を省略するが，方法はどれでもよいから各自解く事。) (A) の特殊解を求めるが，この解が $y=Ax^2+Bx+C$ の形をしていると予想する。(A) に代入して $3Ax^2+(2A+3B)x+(B+3C)=x^2+x$ を得る。この式が恒等的に成り立つためには $3A=1, 2A+3B=1, B+3C=0$ が必要十分である。よって $A=\dfrac{1}{3}, B=\dfrac{1}{9}, C=-\dfrac{1}{27}$ が得られ，$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{27}$ は微分方程式 (A) の特殊解になる。よって (A) の一般解は

$$y=Ce^{-3x}+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x-\frac{1}{27}$$

である。

---

(1) 指数関数と三角関数の積の積分をする方法をプリントの最後に書いておくので，それも参考の事。

[**演算子法**] 微分方程式は $y' + 3y = Dy + 3y = (D+3)y = x^2 + x$ の形をしている。$e^{-3x}De^{3x} = D+3$ なので，$e^{-3x}De^{3x}y = x^2 + x$ となり，$De^{3x}y = e^{3x}(x^2 + x)$ を得る。両辺を積分すると (積分計算は省略。各自実行する事。)，

$$e^{3x}y = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}\right) + C$$

となるので

$$y = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

となる。

[**定数変化法**] $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$ の一般解は $y = Ce^{-3x}$ の形をしている。(前と同様この解法は省略。各自解く事。) 与えられた微分方程式の解関数は，$C(x)$ を関数として $y = C(x)e^{-3x}$ という形をしていると仮定する。元の微分方程式に代入すると，$C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} = x^2 + x$ となり $C'(x) = e^{3x}(x^2 + x)$ が得られる。積分して (積分計算は省略。各自実行する事。)，$C(x) = e^{3x}\left(\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{27}\right) + C$ となるので

$$y = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

を得る。これが一般解である事は演習問題 6.4 と同様の方法で分かる。

(4) [**特殊解予想**] 与えられた微分方程式を (A) とし，その同次型 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$ を (B) とおくと，

$$(A) \text{ の一般解} = (B) \text{ の一般解} + (A) \text{ の特殊解}$$

が成立しているので，(B) の一般解と (A) の特殊解を求める。(B) の一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ という形をしている。(ここではこの解法を省略するが，方法はどれでもよいから各自解く事。) (A) の特殊解を求めるが，この解が $y = Ax + B$ の形をしていると予想する。(A) に代入して $-3Ax + (-2A - 3B) = x + 4$ を得る。この式が恒等的に成り立つためには $-3A = 1, -2A - 3B = 4$ が必要十分である。よって $A = -\dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{10}{9}$ が得られ，$y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{9}$ は微分方程式 (A) の特殊解になる。よって (A) の一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$$

である。

[**演算子法**] 微分方程式は $y'' - 2y' - 3y = D^2y - 2Dy - 3y = (D^2 - 2D - 3)y = (D-3)(D+1)y = x + 4$ の形をしている。$z = (D+1)y$ とおくと $(D-3)z = x + 4$ となる。$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$ なので，$e^{3x}De^{-3x}z = x + 4$ となり，$De^{-3x}z = e^{-3x}(x+4)$ を得る。両辺を積分すると (積分計算は省略。各自実行する事。)，

$$e^{-3x}z = e^{-3x}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{13}{9}\right) + C_1$$

となるので

$$z = C_1e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{13}{9}$$

となる。$z = (D+1)y$ なので，$e^{-x}De^{x} = D + 1$ を用いて $(D+1)y = C_1e^{3x} - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{13}{9}$ を変形すると $De^{x}y = C_1e^{4x} - e^{x}\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{9}\right)$ となる。これを積分して，

$$e^{x}y = \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 - e^{x}\left(\frac{1}{3}x + \frac{10}{9}\right)$$

となるので，

$$y=\frac{C_1}{4}e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}$$

を得る。係数 $\frac{C_1}{4}$ を C_1 におき直してもよい。

[**定数変化法**] $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$ の一般解は $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ の形をしている。与えられた微分方程式の解関数は，$C(x)$ を関数として $y=C_1e^{3x}+C(x)e^{-x}$ という形をしていると仮定する。C_1, C_2 ともに関数としてもできるが，一方を定数，他方を関数と考えてできる事が分かっているので上の様においた。元の微分方程式に代入すると，$C''(x)e^{-x}-4C'(x)e^{-x}=x+4$ となり $C''(x)-4C'(x)=e^x(x+4)$ が得られる。積分して $C'(x)-4C(x)=e^x(x+3)+C_2$ となる。これを新しい微分方程式と思い定数変化法をもう一度適用する。$C'(x)-4C(x)=0$ の一般解は $C(x)=Ee^{4x}$ なので $C(x)=E(x)e^{4x}$ とおくと $E'(x)e^{4x}=e^x(x+3)+C_2$ が得られる。$E'(x)=e^{-3x}(x+3)+C_2e^{-4x}$ を積分して

$$E(x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}(x+\frac{10}{3})-\frac{C_2}{4}e^{-4x}+C_3$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
y &= C_1e^{3x}+C(x)e^{-x}\\
&= C_1e^{3x}+E(x)e^{4x}e^{-x}=C_1e^{3x}+E(x)e^{3x}\\
&= C_1e^{3x}+\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}(x+\frac{10}{3})-\frac{C_2}{4}e^{-4x}+C_3\right)e^{3x}\\
&= (C_1+C_3)e^{3x}-\frac{C_2}{4}e^{-x}-\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}
\end{aligned}$$

を得る。係数 C_1+C_3 を C_1 に，$-\frac{C_2}{4}$ を C_2 に置きなおしてもよい。これが一般解である事は演習問題 6.4 と同様の方法で分かる。

(5) [**特殊解予想**] 与えられた微分方程式を (A) とし，その同次型 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$ を (B) とおくと，

$$(A)\text{ の一般解}=(B)\text{ の一般解}+(A)\text{ の特殊解}$$

が成立しているので，(B) の一般解と (A) の特殊解を求める。(B) の一般解は $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ という形をしている。(ここではこの解法を省略するが，方法はどれでもよいから各自解く事。) (A) の特殊解を求めるが，この解が $y=A\sin x+B\cos x$ の形をしていると予想する。(A) に代入して $(-4A+2B)\sin x(-2A-4B)\cos x=\sin x$ を得る。この式が恒等的に成り立つためには $-4A+2b=1, -2A-4B=0$ が必要十分である。よって $A=-\frac{2}{10}, B=\frac{1}{10}$ が得られ，$y=-\frac{2}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$ は微分方程式 (A) の特殊解になる。よって (A) の一般解は

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{2}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$$

である。

[**演算子法**] 微分方程式は $y''-2y'-3y=D^2y-2Dy-3y=(D^2-2D-3)y=(D-3)(D+1)y=\sin x$ の形をしている。$z=(D+1)y$ とおくと $(D-3)z=\sin x$ となる。$e^{3x}De^{-3x}=D-3$ なので，$e^{3x}De^{-3x}z=\sin x$ となり，$De^{-3x}z=e^{-3x}\sin x$ を得る。両辺を積分すると (積分計算は省略。各自実行する事。),

$$e^{-3x}z=e^{-3x}\left(-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x\right)+C_1$$

となるので

$$z = C_1 e^{3x} - \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x$$

となる。$z = (D+1)y$ なので，$e^{-x}De^{x} = D+1$ を用いて $(D+1)y = C_1 e^{3x} - \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x$ を変形すると $De^{x}y = C_1 e^{4x} - e^{x}\left(\frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x\right)$ となる。これを積分して，

$$e^{x}y = \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 - e^{x}\left(\frac{2}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x\right)$$

となるので，

$$y = \frac{C_1}{4}e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{2}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x$$

を得る。係数 $\frac{C_1}{4}$ を C_1 におき直してもよい。

[**定数変化法**] $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ の形をしている。与えられた微分方程式の解関数は，$C(x)$ を関数として $y = C_1 e^{3x} + C(x)e^{-x}$ という形をしていると仮定する。C_1, C_2 ともに関数としてもできるが，一方を定数，他方を関数と考えてできる事が分かっているので上の様においた。元の微分方程式に代入すると，$C''(x)e^{-x} - 4C'(x)e^{-x} = \sin x$ となり $C''(x) - 4C'(x) = e^{x}\sin x$ が得られる。積分して $C'(x) - 4C(x) = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C_2$ となる。これを新しい微分方程式と思い定数変化法をもう一度適用する。$C'(x) - 4C(x) = 0$ の一般解は $C(x) = Ee^{4x}$ なので $C(x) = E(x)e^{4x}$ とおくと $E'(x)e^{4x} = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C_2$ が得られる。$E'(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}(\sin x - \cos x) + C_2 e^{-4x}$ を積分して

$$E(x) = \frac{1}{10}e^{-3x}(-2\sin x + \cos x) - \frac{C_2}{4}e^{-4x} + C_3$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
y &= C_1 e^{3x} + C(x)e^{-x} \\
&= C_1 e^{3x} + E(x)e^{4x}e^{-x} = C_1 e^{3x} + E(x)e^{3x} \\
&= C_1 e^{3x} + \left(\frac{1}{10}e^{-3x}(-2\sin x + \cos x) - \frac{C_2}{4}e^{-4x} + C_3\right)e^{3x} \\
&= (C_1 + C_3)e^{3x} - \frac{C_2}{4}e^{-x} - \frac{2}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x
\end{aligned}$$

を得る。係数 $C_1 + C_3$ を C_1 に，$-\frac{C_2}{4}$ を C_2 に置きなおしてもよい。これが一般解である事は演習問題 6.4 と同様の方法で分かる。

(6) [**特殊解予想**] 与えられた微分方程式を (A) とし，その同次型 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ を (B) とおくと，

$$(A) \text{ の一般解} = (B) \text{ の一般解} + (A) \text{ の特殊解}$$

が成立しているので，(B) の一般解と (A) の特殊解を求める。(B) の一般解は $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ という形をしている。(ここではこの解法を省略するが，方法はどれでもよいから各自解く事。) (A) の特殊解を求めるが，こ

の解が $y=Ae^{2x}$ の形をしていると予想する。(A) に代入して $-3Ae^{2x}=e^{2x}$ を得る。よって $A=-\dfrac{1}{3}$ が得られ，$y=-\dfrac{1}{3}e^{2x}$ は微分方程式 (A) の特殊解になる。よって (A) の一般解は

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}$$

である。

[**演算子法**] 微分方程式は $y''-2y'-3y=D^2y-2Dy-3y=(D^2-2D-3)y=(D-3)(D+1)y=e^{2x}$ の形をしている。$z=(D+1)y$ とおくと $(D-3)z=e^{2x}$ となる。$e^{3x}De^{-3x}=D-3$ なので，$e^{3x}De^{-3x}z=e^{2x}$ となり，$De^{-3x}z=e^{-x}$ を得る。両辺を積分すると，

$$e^{-3x}z=-e^{-x}+C_1$$

となるので

$$z=C_1e^{3x}-e^{2x}$$

となる。$z=(D+1)y$ なので，$e^{-x}De^{x}=D+1$ を用いて $(D+1)y=C_1e^{3x}-e^{2x}$ を変形すると $De^{x}y=C_1e^{4x}-e^{3x}$ となる。これを積分して，

$$e^{x}y=\frac{C_1}{4}e^{4x}+C_2-\frac{1}{3}e^{3x}$$

となるので，

$$y=\frac{C_1}{4}e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}$$

を得る。係数 $\dfrac{C_1}{4}$ を C_1 におき直してもよい。

[**定数変化法**] $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ の一般解は $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ の形をしている。与えられた微分方程式の解関数は，$C(x)$ を関数として $y=C_1e^{3x}+C(x)e^{-x}$ という形をしていると仮定する。C_1, C_2 ともに関数としてもできるが，一方を定数，他方を関数と考えてできる事が分かっているので上の様においた。元の微分方程式に代入すると，$C''(x)e^{-x}-4C'(x)e^{-x}=e^{2x}$ となり $C''(x)-4C'(x)=e^{3x}$ が得られる。積分して $C'(x)-4C(x)=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C_2$ となる。これを新しい微分方程式と思い定数変化法をもう一度適用する。$C'(x)-4C(x)=0$ の一般解は $C(x)=Ee^{4x}$ なので $C(x)=E(x)e^{4x}$ とおくと $E'(x)e^{4x}=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C_2$ が得られる。$E'(x)=\dfrac{1}{3}e^{-x}+C_2e^{-4x}$ を積分して

$$E(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{C_2}{4}e^{-4x}+C_3$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
y &= C_1e^{3x}+C(x)e^{-x}\\
&= C_1e^{3x}+E(x)e^{4x}e^{-x}=C_1e^{3x}+E(x)e^{3x}\\
&= C_1e^{3x}+\left(-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{C_2}{4}e^{-4x}+C_3\right)e^{3x}\\
&= (C_1+C_3)e^{3x}-\frac{C_2}{4}e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}
\end{aligned}$$

を得る。係数 C_1+C_3 を C_1 に，$-\dfrac{C_2}{4}$ を C_2 に置きなおしてもよい。これが一般解である事は演習問題 6.4 と同様の方法で分かる。

指数関数と 3 角関数の積の積分の計算例

$\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ は部分積分を 2 回実行してもできるが，オイラーの公式を利用し，複素数値積分を考えてもできる。ここでその紹介をしておく。$J_1 = \int e^{ax}\cos bx dx$, $J_2 = \int e^{ax}\sin bx dx$ とおく。$e^{ibx} = \cos bx + i\sin bx$ なので

$$
\begin{aligned}
J_1 + iJ_2 &= \int e^{ax}\cos bx dx + i\int e^{ax}\sin bx dx \\
&= \int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)dx \\
&= \int e^{ax}e^{ibx}dx = \int e^{ax+ibx}dx \\
&= \int e^{(a+ib)x}dx \\
&= \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} \\
&= \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}e^{ibx} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + i\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) \\
J_2 &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)
\end{aligned}
$$

となる。