線形解析 II 問題解説 #11

河野

演習問題 6.6　行列 A が次の形の行列のとき，式 (1) の形の微分方程式を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

行列の対角化に関しては理解していることを仮定して計算過程は省略する。

(1) 固有多項式は $\Phi_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2$ なので固有値は $t = 1, 2$ である。2 に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，1 に属する 1 次独立な固有ベクトルとして，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ なので $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり対角化できる。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し微分方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ であった。$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= \frac{d}{dt}P^{-1}\boldsymbol{x} = P^{-1}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \\ &= P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= P^{-1}AP\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となる。成分ごとに書き下すと

$$\frac{du}{dt} = 2u,\ \frac{dv}{dt} = v,\ \frac{dw}{dt} = w$$

となる。これを解いて (解答省略。各自解く様に。)，$u = C_1e^{2t}$, $v = C_2e^t$, $w = C_3e^t$ を得る。よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2v+w \\ u+v \\ -2u+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + 2C_2e^t + C_3e^t \\ C_1e^{2t} + C_2e^t \\ -2C_1e^{2t} + C_3e^t \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 固有多項式は $\Phi_A(t) = t^3 - 1 = (t-1)\left(t - \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ なので固有値は $t = 1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ である。1 に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ に属する固有ベクトルとして，

$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ に属する固有ベクトルとして，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, を選ぶ。$P = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ とおく。$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 1 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

となり対角化できる。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し微分方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ であった。$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= \frac{d}{dt}P^{-1}\boldsymbol{x} = P^{-1}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \\ &= P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= P^{-1}AP\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となる。成分ごとに書き下すと

$$\frac{du}{dt} = u,\ \frac{dv}{dt} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}v,\ \frac{dw}{dt} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}w$$

となる。これを解いて (解答省略。各自解く様に。),

$$u = C_1e^t,\ v = C_2\exp\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t,\ w = C_3\exp\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^t + \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}C_2\exp\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}C_3\exp\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}t \\ C_1e^t + C_2\exp\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}t + C_3\exp\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}t \\ C_1e^t + \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}C_2\exp\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}C_3\exp\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 6.7　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，3) の形の微分方程式を解け。

A の固有多項式は $\Phi_A(t) = (t-2)^2$ なので固有値は 2 である。2 に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとる。$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ と 3 角化できる。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと $\boldsymbol{y}$ は微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= \frac{d}{dt}P^{-1}\boldsymbol{x} = P^{-1}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \\ &= P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= P^{-1}AP\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

を満たす。成分ごとに書き下すと

$$\frac{du}{dt} = 2u + v,\ \frac{dv}{dt} = 2v$$

となる。$v = C_2e^{2t}$ となるので，$\dfrac{du}{dt} = 2u + C_2e^{2t}$ となる。$(D-2)u = C_2e^{2t}$ を $D-2 = e^{2t}De^{-2t}$ を用いて変形すると，$e^{2t}De^{-2t}u = C_2e^{2t}$ より，$De^{-2t}u = C_2$ を得る。両辺を積分すると $e^{-2t}u = C_2t + C_1$ となるので，

$$u = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$$

を得る。よって

$$x = u = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}, y = -u + v = (C_2 - C_1)e^{2t} - C_2te^{2t}$$

をえる。

演習問題 6.8　行列 A が次の形の行列のとき，式 (1) の形の微分方程式を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 成分ごとに書き下すと，

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y,\ \frac{dy}{dt} = y + z,\ \frac{dz}{dt} = z$$

となる。

$\dfrac{dz}{dt} = z$ は $(D-1)z = 0$ とできるので，$e^tDe^{-t} = D - 1$ を用いて，$e^tDe^{-t}z = 0$ と変形できる。$De^{-t}z = 0$ の両辺を積分すると，$e^{-t}z = C_3$ となるので，

$$z = C_3e^t$$

を得る。

$\dfrac{dy}{dt} = y + z$ は $(D-1)y = C_3 e^t$ となるので，$e^t D e^{-t} = D - 1$ を用いて，$e^t D e^{-t} y = C_3 e^t$ と変形できる。$De^{-t}y = C_3$ の両辺を積分すると，$e^{-t}y = C_3 t + C_2$ となるので，

$$y = C_2 e^t + C_3 t e^t$$

を得る。

$\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$ は $(D-2)x = C_2 e^t + C_3 t e^t$ となるので，$e^{2t} D e^{-2t} = D - 2$ を用いて，$e^{2t} D e^{-2t} x = C_2 e^t + C_3 t e^t$ と変形できる。$De^{-2t}x = C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}$ の両辺を積分すると，$e^{-2t}x = -C_2 e^{-t} - C_3(te^{-t} + e^{-t}) + C_1$ となるので，

$$x = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3)e^t - C_3 t e^t$$

を得る。

(2) 成分ごとに書き下すと，

$$\frac{dx}{dt} = x + y,\ \frac{dy}{dt} = y + z,\ \frac{dz}{dt} = z$$

となる。

$\dfrac{dz}{dt} = z$ は $(D-1)z = 0$ とできるので，$e^t D e^{-t} = D - 1$ を用いて，$e^t D e^{-t} z = 0$ と変形できる。$De^{-t}z = 0$ の両辺を積分すると，$e^{-t}z = C_3$ となるので，

$$z = C_3 e^t$$

を得る。

$\dfrac{dy}{dt} = y + z$ は $(D-1)y = C_3 e^t$ となるので，$e^t D e^{-t} = D - 1$ を用いて，$e^t D e^{-t} y = C_3 e^t$ と変形できる。$De^{-t}y = C_3$ の両辺を積分すると，$e^{-t}y = C_3 t + C_2$ となるので，

$$y = C_2 e^t + C_3 t e^t$$

を得る。

$\dfrac{dx}{dt} = x + y$ は $(D-1)x = C_2 e^t + C_3 t e^t$ となるので，$e^t D e^{-t} = D - 1$ を用いて，$e^t D e^{-t} x = C_2 e^t + C_3 t e^t$ と変形できる。$De^{-t}x = C_2 + C_3 t$ の両辺を積分すると，$e^{-t}x = -C_t + \dfrac{1}{2} C_3 t^2 + C_1$ となるので，

$$x = C_1 e^t + C_2 e^t + \frac{1}{2} C_3 t^2 e^t$$

を得る。

演習問題 6.9　この方法で演習問題 6.6 の微分方程式を解け。

(1) 微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の解で，$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_0$ となるものは

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

で与えられる。

P を演習問題 6.6 (1) 解説でとったものと同じ行列とする。このとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となっている。

$B = P^{-1}AtP$ とおくと $B = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ である。$P^{-1}A^2t^2P = P^{-1}AtPP^{-1}AtP = BB = B^2$ となる。同様に $P^{-1}A^nt^2P = (P^{-1}AtP)^n = B^n$ となる。

$$\begin{aligned}
P^{-1}e^{At}P &= P^{-1}\left(E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots\right)P \\
&= P^{-1}EP + P^{-1}AtP + \frac{1}{2!}P^{-1}A^2t^2P + \cdots + \frac{1}{n!}P^{-1}A^nt^nP + \cdots \\
&= E + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} (2t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} (2t)^n & 0 & 0 \\ 0 & t^n & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
e^{At} &= P\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} + 2e^t & -e^{2t} + e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t & -e^{2t} + e^t \\ -2e^{2t} + 2e^t & -4e^{2t} - 4e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} + 2e^t & -e^{2t} + e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t & -e^{2t} + e^t \\ -2e^{2t} + 2e^t & -4e^{2t} - 4e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の解で，$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_0$ となるものは

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

で与えられる。

P を演習問題 6.6 (1) 解説でとったものと同じ行列とする。このとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

となっている。前問と同様に計算すると

$$\begin{aligned} P^{-1}e^{At}P &= P^{-1}\left(E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots\right)P \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \exp\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \exp\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \exp\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \exp\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 1 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。$\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$\omega^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ なので

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t + \exp\omega t + \exp\omega^2 t & e^t + \omega^2\exp\omega t + \omega\exp\omega^2 t & e^t + \omega\exp\omega t + \omega^2\exp\omega^2 t \\ e^t + \omega\exp\omega t + \omega^2\exp\omega^2 t & e^t + \exp\omega t + \exp\omega^2 t & e^t + \omega^2\exp\omega t + \omega\exp\omega^2 t \\ e^t + \omega^2\exp\omega t + \omega\exp\omega^2 t & e^t + \omega\exp\omega t + \omega^2\exp\omega^2 t & e^t + \exp\omega t + \exp\omega^2 t \end{pmatrix}$$

となっている。あとは $e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を計算すればよい。