線形解析 I 要綱 #1　　　2005–4–11　　　河野

1　連立 1 次方程式と行列

ベクトル空間から議論を始めるのが通常の線型代数の講義の順序であるが,「連立 1 次方程式を解く」事はその議論の途中でも出てくるので，最初にこれについて学ぶ。

後期の線形解析 II でも連立 1 次方程式の一般理論を行列の基本変形・階数と関係させて扱う。

1.1　行列の積

連立 1 次方程式を一般に表現するとき，行列を用いると便利である。行列に関してはまた後で取り上げるが，ここでは積についてのみふれておく。

最初は 2 次行列から始める。実数 a, b, c, d を正方形に並べて書き，それをひとまとめにしたもの

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を 2 次**行列** (*matrix*) (2×2 行列，$(2,2)$ 行列，2 行 2 列の行列) と呼ぶ。2 重添字を用いて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

という書き方もする。a_{ij} を行列 A の (i,j) 成分と呼び，$(a_{11}\, a_{12})$ を A の第 1 行，$(a_{21}\, a_{22})$ を A の第 2 行という。$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ を A の第 1 列，$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を A の第 2 列という。一般には m 行 n 列の行列を (m,n) 行列 ($m \times n$ 行列または m 行 n 列行列) という。(n,n) 行列を n 次行列とも言う。

2 つの 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対し積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する(1)。

この積の定義を見ると，積 AB の (i,j) 成分は A の i 行と B の j 列の各成分を順にかけて，それをすべて足したものになっている。この事に注意すると，2 次行列でなくとも行列の積が定義される。

例えば $(3,4)$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $(4,2)$ 行列 $B = (b_{ij})$ の積は

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} + a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) 何故この様に定義するかは線型写像の所でふれる予定である。

となる。

実数の積と同様に

$$A(BC) = (AB)C \qquad (結合法則)$$

が成立する。積に関しては交換法則は成立しない。すなわち行列 A, B で $AB \neq BA$ となる行列 A, B が存在する。

演習問題 1.1 次の行列 A, B に対し AB を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

演習問題 1.2 2 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる例を 1 つあげよ。3 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる例を 1 つあげよ。

1.2 連立 1 次方程式

連立 1 次方程式を表現する形は色々ある。

$$(E) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

(E) が通常の連立 1 次方程式である。これを行列を用いて表現する。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$(E_M) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表現できる。(E_M) を行列表示という。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$(E_V) \qquad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と表現できる。(E_V) をベクトル方程式表示という。この 3 つは同じ内容を表している。

連立 1 次方程式がいつ解を持つか，解をどのように表示するかという問題が考えられるが，一般論に関しては後期に扱う。ここでは基本変形を用いた解の具体的表示を与える。

最初に簡単な例を考える。

$$(E) \qquad \begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= a \end{cases}$$

この連立 1 次方程式に解が存在する場合は $1 = x+y = a$ なので，$a = 1$ が必要である。$a \neq 1$ の時は解が存在しない。この様に連立 1 次方程式には解が存在する場合もあるし，存在しない場合もある。

$a = 1$ のとき解が存在するが，解は 1 個ではなく。たくさん存在する。その全ての解は t をパラメータとして

$$x = t, y = 1-t$$

と表す事ができる。即ち任意の t に対し $x = t, y = 1-t$ は連立 1 次方程式 (E) の解になっており，また連立 1 次方程式 (E) の任意の解 x, y に対しある t が存在して $x = t, y = 1-t$ と書く事ができる。ベクトルの形に表示すると，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。解が存在する場合は，この様に解をパラメータ表示する事ですべての解を求める事ができる。この様なパラメータ表示を求める事が「**連立 1 次方程式を解く**」事であるといえる。

解が唯 1 つの場合もパラメータ表示の一種と考える事ができる。例えば

$$(E_1) \qquad \begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \end{cases}$$

の場合解は $x = 1, y = 1$ となるが，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と考える事ができる。

連立 1 次方程式 (E) を解く事は難しくなかった。もうすこし難しい連立 1 次方程式を解く事を考えよう。

$$(E_2) \qquad \begin{cases} 1x+2y+1z = 1 \\ 1x+3y+2z = 2 \\ 2x+5y+3z = b+3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix}$$

左が連立 1 次方程式，右がその係数を書き並べた行列 (係数拡大行列と呼ばれる) である。ここで b は与えられた定数とする。この方程式が解を持つか，また持つときその解をどの様に書き表すか，という問題を考える。与えられた連立方程式では解の存在等に関して分かりにくいので加減法を用いて変形して行く。

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 2x+5y+3z=b+3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 1x+2y+1z=b+1 \end{cases} \quad (3\text{ 式} \to 3\text{ 式}-2\text{ 式}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行} \to 3\text{ 行}-2\text{ 行})$$

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 0x+0z+0y=b \end{cases} \quad (3\text{ 式} \to 3\text{ 式}-1\text{ 式}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行} \to 3\text{ 行}-1\text{ 行})$$

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 0x+1y+1z=1 \\ 0x+0y+0z=b \end{cases} \quad (2\text{ 式} \to 2\text{ 式}-1\text{ 式}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (2\text{ 行} \to 2\text{ 行}-1\text{ 行})$$

この変形で行っているのは，式の加減 (行列では，ある行の何倍かを別の行に加える操作) である。この変形は逆変形もできるので，与えられた連立 1 次方程式の解と最後の連立 1 次方程式の解は同じである事が分かる。この事を 2 つの連立 1 次方程式は**同値である**という。

最後の連立 1 次方程式の解について考えると，$b \neq 0$ のとき解は存在しない事が分かるので，以下 $b=0$ とする。今 z をパラメータに選び，これを自分が自由に決定できるとしよう(2)。このことを書き方の上でも明確にするため $t=z$ とおく(3)

連立 1 次方程式の解 x, y, z はパラメータ t を用いて

$$x=t-1,\ y=1-t,\ z=t$$

と表す事ができる。ベクトルの形で表示すると

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。t を任意に与えると，x, y, z は連立 1 次方程式の解になっているし，逆に連立 1 次方程式の任意の解はある t を用いて上のように書ける。

(2) z の代わりに例えば，x を選んでもよい。
(3) t に置き換える必要は特にないのだが，表示を明確にするためここでは置き換えた。