線形解析 I 要綱 #4 　　2005–5–9 　河野

2.2 3 次元数ベクトル空間

この節では 3 **項数ベクトル**[1] と 3 次元数ベクトル空間について述べる。この概念は後に n 次元数ベクトル空間 へと拡張される。3 次元数ベクトルは幾何的なものととらえる事もできるが，拡張されるとその様な見方はできなくなる。ベクトルに対し幾何学的なイメージを持つ事は重要であるが，概念が拡張されたときに，幾何学的イメージにとらわれず抽象的に考える事も重要である。

高校ではベクトル横ベクトルとして

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

と書いていたが，線形解析では 2 項数ベクトルと同様に通常縦**ベクトル** (*vector*) で

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と書く。3 項数ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^3$ で表し，3 **次元数ベクトル空間** (*3–dimensional vector space*) という。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ が等しいとは $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ を意味し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と書く。

3 次元数ベクトル空間には和と実数倍が以下の様に定義される。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ と実数 α に対し和と実数倍を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \qquad \alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。

ベクトルに対し，始点を原点に平行移動したものを考える。このときベクトルとベクトルの終点を対応させる事により，3 次元数ベクトル空間の元であるベクトルと 3 次元ユークリッド空間の点が一対一に対応する。この様に見たときベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶのは 2 次元の場合と同様である。3 次元数ベクトル空間を $\boldsymbol{R}^3$ という記号で書いたのも，この見方から来ている (更に付け加えて言えば，成分表示している事は，このユークリッド空間に直交座標を 1 つ固定して考えている事を意味する)。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

[1] 2 項数ベクトルと同様に普通は 3 次元ベクトルと呼ばれる。

和と実数倍に関しては次の 8 つの性質が**基本的**である。

命題 2.4 (1) [結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

(2) [交換法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(3) [零ベクトルの存在] 零ベクトルと呼ばれるベクトル $\mathbf{0}$ が存在して任意のベクトルについて $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$

(4) [逆ベクトルの存在] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し逆ベクトルと呼ばれるベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$

(5) [ベクトルに関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$$

(6) [実数倍に関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$$

(7) [実数倍に関する結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

(8) [単位倍] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 1 に対し $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

証明 (1) のみ証明しよう。ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とする。実数 a, b, c に対しては結合法則 $a+(b+c)=(a+b)+c$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は定義により $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ である。さらに定義により $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ (x_3+y_3)+z_3 \end{pmatrix}$ となる。同様に $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ は $\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ x_3+(y_3+z_3) \end{pmatrix}$ となる。実数の結合法則より，2 つのベクトルの各成分が等しいので $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成立する。∎

演習問題 2.3 命題 2.4 を証明せよ。

命題 2.4 を基本的と言ったのは命題 2.1 を基本的と言ったのとまったく同じ理由である。

演習問題 2.4 次を命題 2.4 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。
(1) $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$
(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$

成分表示を用いない証明を考えると，演習問題 2.2 と演習問題 2.4 は全く同じ証明になる事が分かる。

3 項数ベクトルに対し内積を定義する。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し，その内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

で定義する。

2 項数ベクトルの場合と同様に次の命題が成立する。

命題 2.5 ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の長さを $|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|$，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

が成立する。

これを示すために次の命題を用いる。証明は容易なので演習問題としよう。

命題 2.6 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{R}^3$ と $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し次が成立する。

(1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$

(2) $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$

(4) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(5) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(6) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$

演習問題 2.5 命題 2.6 を証明せよ。

命題 2.5 の証明： $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を位置ベクトルと考え，それが表す点をそれぞれ A, B とする。3 角形 OAB(O は原点) を考える。$OA = |\boldsymbol{x}|$,$OB = |\boldsymbol{y}|$,$AB = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ なので，3 角形 OAB に余弦定理を適用すると，

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

が成立する。命題 2.6 より，$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) + ((-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, (-1)\boldsymbol{x}) + ((-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ((-1)\boldsymbol{x}, (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる。よって $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$ が成立する。∎

命題 2.5 の系として次が従う。ただしゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ は任意のベクトルと直交するものとする。

系 2.7 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$

内積の 1 つの応用として空間内の平面の方程式を求めておこう。

命題 2.8 空間内の平面を P とすると，定数 a_1, a_2, a_3, b が存在して
$P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \right\}$ となる。逆に a_1, a_2, a_3 のどれかが 0 でなければ $P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \right\}$ は平面を表す。

証明　ここではベクトルと空間の点を同一視して考える。P を空間内の平面とする。この平面に直交するベクトルを 1 つ固定し $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とする。また P 上のベクトルを 1 つ固定し $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を平面上の任意の点とすると，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は平面上に乗っていると考えられるので $\boldsymbol{a}$ と直交している。よって $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立する。成分で書き直すと $a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3) = 0$ となる。$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = b$ とおくと，$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ が成立している。よって平面はある 1 次式 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ で表される。

逆に 1 次式 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ に対し，$P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が平面上の点であることを示す。a_1, a_2, a_3 のどれかは 0 でない。今簡単のために $a_1 \neq 0$ として証明する ($a_2 \neq 0$ 等の場合も同様に示すことができる)。$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}_0 \in P$ である。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とおき，P の任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = b$ となっている。$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0) = b$ なので，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0)$ がとなり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立している。よって $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は直交しているので，P は $\boldsymbol{a}$ と直交する平面を表す。 ∎

2.3　n 次元数ベクトル空間

高校時代のベクトルは幾何学的なものとして導入された。我々も今まで扱ったのはそれであった。幾何的なものに固執している限り一般次元に拡張する事は易しくない。しかし代数的にみると平面のベクトルは 2 個の実数の組で表され，空間のベクトルは 3 個の組で表されている。そこに着目して一般化を行う。即ち平面のベクトルが実数を 2 個並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と表され，空間のベクトルが実数を 3 個並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と表される事に注目して，実数を n 個並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元数ベクトルと定義する。

定義 2.9 n を自然数とする。n 個の実数 $a_1, \ldots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と書いて n **項数ベクトル**と言う。簡単に (x_i) とも書く。ベクトルは普通太文字で ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{v}$ 等) 書き表す。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ と $\boldsymbol{y} = (y_i)$ が等しいとは，各 i ($i = 1, \ldots, n$) に対し $x_i = y_i$ が成立する時と定義する。

n 項 (列) 数ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$ と書いて n **次元数ベクトル空間** (または n **項数ベクトル空間**) と言う。行ベクトルも同様に考えられるが我々は普通列ベクトルを考え，以下いちいち列ベクトルとはことわらない事にする。

3 次元ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 40 \end{pmatrix}$ がある。4 次元ベクトルの例として $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$,
5 次元ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 506 \\ 365 \\ 123 \\ 290 \\ 745 \end{pmatrix}$ などが考えられる。

n 次元ベクトルには和と実数倍が以下の様に定義できる。
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

(x_i), (y_i) という表記を用いると，

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \qquad \alpha(x_i) = (\alpha x_i)$$

表せる。

高校で学んだ 3 次元までのベクトルの時は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ という書き方でもよかったが n 次元のベクトルになると添字付きの表現でなければ表されない場合も発生する。

2 項，3 項数ベクトルでも取り上げたが，次が成立する。

命題 2.10 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の元とし α, β を実数とする時次が成立する。

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) 特別な元 $\mathbf{0}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し
$\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{0}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}=\alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

幾つかを証明し残りは演習問題としておく。

証明

(1) を示そう。実数に関しこのタイプの結合法則は知られているものとする。つまり任意の実数 a,b,c に対し $a+(b+c)=(a+b)+c$ の成立は仮定する。$\boldsymbol{u}=(u_i),\boldsymbol{v}=(v_i),\boldsymbol{w}=(w_i)$ とする。$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_i+v_i)$ であるので,

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=(u_i+v_i)+(w_i)=((u_i+v_i)+w_i)=(u_i+(v_i+w_i))=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

よって示された。次に (3)。$\boldsymbol{0}$ をすべての成分が 0 であるベクトルとすると，この性質を満たす事はすぐ分かる。(2) ■

実数 $\boldsymbol{R}$ は 1 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^1$ と同一視できる。実数 x と 1 次元ベクトル (x) は厳密には同じものではないが同一視しても混乱は起こらないので以下そう考える。

演習問題 2.6 命題 2.10 を証明せよ。

高校のときはベクトルを幾何学的なものと考えていたので成分が実数であるということは当然とされた。しかし定義 2.9 の様に拡張された段階では係数が複素数の場合も同様な理論を展開することが可能である。定義としてきちんと書けば以下の様になる。

定義 2.11 n を自然数とする。n 個の複素数 $a_1,\ldots,a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて n **次元複素ベクトル**と言う。n **項複素ベクトル**ともいう。簡単に (a_i) とも書く。n 次元複素ベクトル全体を $\boldsymbol{C}^n$(複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ で表す) と書いて n **次元複素ベクトル空間**と言う。以後定義 2.9 で定義した n 次元ベクトルを n **次元実ベクトル**と呼ぶことにする。複素ベクトルには和と複素数倍が実数の場合と同様に以下の様に定義できる。

(2) この証明が命題 2.1 の証明とほぼ同じである事に気がついた人もいるかもしれない。成分の個数が異なるだけで示す方法は全く同じである。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

(a_i), (b_i) の記号を用いると,

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i), \qquad \alpha(a_i) = (\alpha a_i)$$

となる。

前に出てきた $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{C}^n$ のベクトルと区別したいときは n **項実ベクトル**と呼ぶ。

以上の定義を見ると実数の場合と複素数の場合が殆ど同じであることが分る。我々は以下では実数の場合と同様に複素数の場合も取り扱っていくが，性質が殆ど同じなので一々2 つの場合に分けて論議するのは面倒臭い。そこで一度に論議するために $\boldsymbol{K}$ という記号を導入する。$\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ を表わし $\boldsymbol{K}$ の元をスカラーと呼ぶことにする。そして $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間というものを考える。$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ のときは実ベクトル空間，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ のときは複素ベクトル空間になる。繰り返しになりくどいが $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の定義を述べておく。

定義 2.12 n を自然数とする。n 個のスカラー $a_1, \dots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて K 上の n **次元ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。n 次元ベクトル全体を $\boldsymbol{K}^n$ と書いて K 上の n **次元ベクトル空間**と言う (n **項数ベクトル空間**ともいう)。K が明らかなときは「K 上」を省略する場合がある。

K 上のベクトル空間に対しても命題 2.10 と同様の命題が成立する。

命題 2.13 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{K}^n$ の元とし α, β を $\boldsymbol{K}$ の元とする時次が成立する。

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ 　(結合法則)

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ 　(交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{0}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し
$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$