線型解析 I 要綱 #6

2005–5–23　　河野

2.5　1 次独立と基底

定義 2.18 ベクトル空間 V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が次の性質をもつとき **1 次独立** (*linearly independent*) であるという：「スカラー $c_1, \ldots, c_k$ に対し

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が成立していれば $c_1 = \cdots = c_k = 0$」

係数がすべて 0 のときはいつでも 1 次結合のベクトルが 0 になる。この定義はそれの逆が成立する場合に名前をつけたものである。

演習問題 2.13　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

(7) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

演習問題 2.14　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立とする。$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ に対し，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立かどうか調べよ。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

また $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1,$ に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。
更に $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$ に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

$k = 1, 2, 3$ の場合 1 次独立が何を意味しているか具体的にみよう。ここでは $V = \boldsymbol{R}^3$ とし，幾何的イメージも考える事にする。

最初は $k = 1$ の場合 : $\boldsymbol{v}_1$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ から $c_1 = 0$ が出てくるための必要十分条件は $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ である。即ち 1 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立である必要十分条件は $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ である。生成の記号を用いて書くと $\boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立である必要十分条件は $\langle\, \boldsymbol{v}_1 \,\rangle \neq \{\boldsymbol{0}\}$ である。

次に $k = 2$ の場合 : $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である場合，$\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2)$ はすぐに分かる。また 2 つのベクトルが平行だと $\boldsymbol{v}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_2$ と書けるので 1 次独立ではない。逆に 2 つのベクトルが平行でないとき $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ が成立していると $c_1 = c_2 = 0$ となるの。よって 1 次独立である必要十分条件は 2 つのベクトルが並行でない事である。

生成の記号を用いて書くと $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\boldsymbol{0}\} \subsetneq \langle\, \boldsymbol{v}_1 \,\rangle \subsetneq \langle\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \,\rangle$ が成立する事である。

$k = 3$ の場合 : $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立である必要十分条件は 3 つのベクトルが平行 6 面体の 3 辺になっている事である。1 次独立を否定すると，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ かつ $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0, c_3 \neq 0$ が成立する。$c_3 \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_3 = -\dfrac{c_1}{c_3}\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{c_2}{c_3}\boldsymbol{v}_2$ と表す事ができる。このとき $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が張る平面上に存在する。$c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ の場合も同様にできる。生成の記号を用いて書くと $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\boldsymbol{0}\} \subsetneq \langle\, \boldsymbol{v}_1 \,\rangle \subsetneq \langle\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \,\rangle \subsetneq \langle\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \,\rangle$ が成立する事である。

今の議論を一般的に述べると次の命題が得られる。

命題 2.19 ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ について次の 2 つは同値。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ は 1 次独立である。

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立であり，$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin \langle\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \,\rangle$ が成立する。

証明 (1)⇒(2) 定義より $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立なのは明らか。もし $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \,\rangle$ とすると，実数 $a_1, \ldots, a_k$ が存在して $\boldsymbol{v}_{k+1} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k$ となるが，このとき

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k + (-1)\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{0}$$

となり，1 次独立性に矛盾。

(2)⇒(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}$ が 1 次独立でないとすると，どれかは 0 でない実数 $a_1, \ldots, a_k, a$ が存在して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k + a\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{0}$$

が成立する。ここで $a = 0$ とすると $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性に反するので $a \neq 0$。よって移行して

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \left(-\frac{a_1}{a}\right)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{a_k}{a}\right)\boldsymbol{v}_k$$

が得られ，$\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \,\rangle$ となり矛盾。 ∎

演習問題 2.15　次を示せ。

ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で必要十分条件は「任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し,

$$\{\boldsymbol{0}\} \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

が成立することである。

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとする。即ち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。任意の $\boldsymbol{K}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，スカラー x_1, x_2, x_3 が唯 1 組存在して $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と表す事ができる。この様な性質を持つベクトルの組は基本ベクトルに限らない (演習問題 2.16 参照)。ここでは部分空間に関してその様なベクトルの組を考える。

定義 2.20 ベクトル空間 V に対し次の性質をもつベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在する時これをこのベクトル空間 V の**基底** (*base*) と呼ぶ。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である。

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する。即ち $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が成立する。

演習問題 2.16　次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V = \boldsymbol{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $V = \boldsymbol{C}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $V = \boldsymbol{K}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^3 \;\middle|\; x - 2y + z = 0 \right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(6) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(7) $V=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x-y+z+w=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

(8) $V=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0, x-2y+z=0\right\}$ で (1 個のベクトルからなる) ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(9) $V=\boldsymbol{K}^n$ で，ベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$

命題 2.19 により $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるとは極大な (他の V のベクトルを加えると 1 次独立でなくなる様な) 1 次独立なベクトルの集合である事が分る。つまり，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底である必要十分条件は次の 2 つが成立する事である。

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事。つまりスカラー $a_1,\ldots,a_n$ に対し

$$a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{o} \quad\Longrightarrow\quad a_1=\cdots=a_n=0$$

が成立する。

(2) 極大である。つまり，任意の V のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し

$$\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$$

は 1 次独立でない。

これは基底を見つける方法を与える。V をベクトル空間とする。

$V=\{\boldsymbol{0}\}$ の場合は特別である。基底が存在しないとも考えられるが，例外があるのはいやなので空集合が基底と考える事にしよう。

$V\neq\{\boldsymbol{0}\}$ の場合は $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を 1 つ選ぶ。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立なものを捜す。$\langle\boldsymbol{v}_1\rangle=V$ ならこの様なベクトルが存在せず，$\boldsymbol{v}_1$ が基底になる。$\langle\boldsymbol{v}_1\rangle\subsetneq V$ のとき，1 次独立なものが存在するので，それを $\boldsymbol{v}_2$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立なものを捜す。$\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle=V$ のとき，この様なベクトルが存在せず，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が基底になる。$\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle\subsetneq V$ のとき 1 次独立なものがするので，それを $\boldsymbol{v}_3$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立なものを捜す。以下この事を続けていく。後で証明するようにこのステップは有限回で必ず止まる，即ちある n に対し $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底なる。

ベクトル空間 V が $V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_1+x_2+x_3+x_4=0, x_1+2x_2+x_3-x_4=0\right\}$ の様な形で与えられているときは，連立 1 次方程式の解をパラメータ表示することにより，基底「候補」を求めることができる。この例を考える。係数拡大行列は $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&2&1&-1&0\end{pmatrix}$ な

ので基本変形を実行して $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ に変形する。よってこの解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3-3x_4 \\ 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。この $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を基底候補に選ぶ。あとは実際に基底になっていることを示せばよい。

次にベクトル空間 V が $V=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ の様な形で与えられている場合を考える。ここで $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V を生成しているので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立なら V の基底になる。しかし今の場合 $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ が成立しているので，1 次独立ではない。この関係式から $\boldsymbol{v}_3 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ が分かり，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ となる。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立なら V の基底になる。今 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立なので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が基底になる。

演習問題 2.17　次の部分空間の基底を 1 組求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(6) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(7) $v = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(9) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$