線形解析 I 要綱 #8

2005–6–27　　河野

2.7　2 次行列

2 つの 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ の和 $A+B$ を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する。実数の和と同様に

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= (A+B)+C & \text{(結合法則)} \\ A+B &= B+A & \text{(交換法則)} \end{aligned}$$

が成立する。すべての成分が 0 である 2 次行列を**零行列** (*zero matrix*) といい O で表す：

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意の 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し

$$O + A = A$$

が成立する。

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と実数 α に対し，行列のの実数倍 αA を

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する。$(-1)A$ を $-A$ と書き，$A-B$ を $A+(-B)$ で定義する。

2 次行列の積はすでに定義した。2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対し積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

であった。実数の積と同様に

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(結合法則)}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

が成立する。積に関しては交換法則は成立しない

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**単位行列** (*unit matrix*) という。任意の行列 A に対し

$$AE = EA = A$$

が成立する

演習問題 2.19　任意の 2 次行列 A と単位行列 E に対し $AE = EA = A$ が成立する事を示せ。

演習問題 2.20　任意の行列 A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$ 及び $(A+B)C = AC+BC$(分配法則) が成立する事を示せ。

実数の積と行列の積の違いは 2 つある。1 つは交換法則が成立しないことであるが，もう 1 つは逆元の存在である。実数 a に対しその逆元 a^{-1} とは $aa^{-1} = 1$ となる実数である。実数の場合 $a \neq 0$ であれば，a の逆元は存在する。行列 A に対しては

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

となる行列を A の**逆行列** (*inverse matrix*) という。行列に対しては $A \neq O$(零行列) であっても，逆行列が存在するとは限らない (演習問題 2.21)。

演習問題 2.21　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないことを示せ。

定義 2.25 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad - bc$ を A の**行列式** (*determinant*) といい $\det(A)$ と書く。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と書くこともある。

行列式については次の定理が基本的である。

定理 2.26 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

証明　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A) = ad - bc$, $\det(B) = ps - qr$ である。$AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ なので，$\det(AB) = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = apcq + apds + brcq + brds - (aqcp + aqdr + bscp + bsdr) = adps + bcrq - adqr - bcps = ad(ps - qr) - bc(ps - qr) = (ad - bc)(ps - qr) = \det(A)\det(B)$ となる。∎

この定理より次の逆行列の存在に関する定理が得られる。

定理 2.27 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ必要十分条件は $\det(A) \neq 0$ である。このとき A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

証明 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと，$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E$ である。$\det(A) \neq 0$ のとき $B = \dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ とおくと，$AB = BA = E$ となり，B が A の逆行列であることが分かる。

A の逆用列 A^{-1} が存在するとき $AA^{-1} = E$ なので $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E) = 1$ となり，$\det(A) \neq 0$ が分かる。 ∎

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 項数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の積を次の様に定義する：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

行列 A に対し $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。これは後で定義する**線型写像** linear map の例になっている。即ち T_A は次の性質を持つ：
(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $T_A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})$ が成立する。
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_A(\boldsymbol{x})$ が成立する。

$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする。このとき $T_{A(\theta)}$ は原点を中心とする θ 回転になっている。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_{A(\theta)}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。

$B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とする。$T_{B(\theta)}$ は，原点を通り x 軸との角が $\dfrac{\theta}{2}$ の直線に関する折り返しになっている。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_{B(\theta)}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。

定理 2.28 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に関して次は同値である。
(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。
(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくとき，$|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 1, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ が成立する。
(4) ある θ に対し $A = A(\theta)$ または $A = B(\theta)$ である。
(5) $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ を A の**転置行列** (*transpose*) とするとき，$A^TA = E$ が成立する。

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2)： $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$ 及び $|T_A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})|^2 = |T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})|^2 = (T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})) = |T_A(\boldsymbol{x})|^2 + 2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + |T_A(\boldsymbol{y})|^2$ は常に成立している。(1) を仮定すると，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対

し $|T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|$ 及び $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|, |T_A(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{y}|$ が成立しているので，$|T_A(\boldsymbol{x})|^2 + 2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + |T_A(\boldsymbol{y})|^2 = |T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$ より $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が分かる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)：$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{a} = T_A(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{b} = T_A(\boldsymbol{e}_2)$ が成立している。よって $|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1$, $|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (T_A(\boldsymbol{e}_2), T_A(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$ が成立する事が分かる。

(3) $\Longrightarrow$ (4)：$\boldsymbol{a}$ は長さ 1 のベクトルなので $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ となる θ が存在する。$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と直交する長さ 1 のベクトルなので $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ となる。前者の場合 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ であり，後者の場合 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ となるので (4) が示される。

(4) $\Longrightarrow$ (5)：$A = A(\theta)$ とすると，$A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるので，

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = E$$

となる。$A = B(\theta)$ のときも同様に示す事ができる (演習問題 2.22)。

(5) $\Longrightarrow$ (1)：$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので $a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し，$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$, なので $|T_A(\boldsymbol{x})|^2 = (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) = (ax_1 + bx_2)(ax_1 + bx_2) + (cx_1 + dx_2)(cx_1 + dx_2) = (a^2 + c^2)x_1^2 + 2(ab + cd)x_1x_2 + (b^2 + d^2)x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = |\boldsymbol{x}|^2$ となり，(1) が成立する。 ∎

演習問題 2.22　$A = B(\theta)$ のとき $A^T A = E$ を示せ。