2.8 (m,n) 行列

一般の行列について考えよう。各成分は $\boldsymbol{K}$ の元とする。m 行 n 列の行列 ((m,n) 行列，$m\times n$ 行列ともいう)A を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書こう。行列 A を (a_{ij}) とも書く。慣れればこの方が簡単である。2 つの行列 $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{ij})$ が等しい事をともに同じ型 ((m,n) タイプ) の行列であり，任意の i,j に対し $a_{ij}=b_{ij}$ が成立する事と定義する。

(m,n) 行列全体の集合を $M(m,n;\boldsymbol{K})$ で表す。$M(m,n;\boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が次の様に定義できる。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\in M(m,n;\boldsymbol{K})$，$\alpha\in\boldsymbol{K}$ に対し和，スカラー倍を

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する。和とスカラー倍は (a_{ij}) の記号で書くと

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),\qquad \alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$$

と書ける。とくに $m=n$ の時 $M(n;\boldsymbol{K})$ とも書き，その元を n **次** (**正方**) **行列**と言う。K を省略して，$M(n),M(m,n)$ と書く場合もある。

ここで行列の積について復習しておこう。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M(m,n\,;\boldsymbol{K})$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}\in M(n,p\,;\boldsymbol{K})$ に対しその積 $AB=(c_{ij})$ は

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

と定義されていた。定義から分るように積 AB は (m,p) 行列になる。行列の積は全体を通じて基本的である。特に 2 重添字を用いての掛け算が自由にできるようになる事を 1 つの目標として各自取り組んでほしい (演習問題 2.23 参照)。

実数の積と行列の積の違いは 2 次行列のところでも述べたように 2 つある。交換法則が成立しないことと零行列[(1)]でない行列に対して逆行列が存在しない場合がある事である。

共通な性質として次の命題 2.29 があげられる。ここで O は成分がすべてゼロである行列 (**零行列**と呼ばれる)，E は**単位行列**と呼ばれる次の行列とする：クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

で定義した時，n 次行列 E を $E=(\delta_{ij})$[(2)]とする。

命題 2.29 行列のサイズに関して特に書いていないが，和・積は定義されることを仮定している。
(1) 任意の A,B,C に対し $(A+B)+C=A+(B+C)$
(2) 任意の A,B に対し $A+B=B+A$
(3) 任意の A に対し $A+O=A$
(4) 任意の A,B,C に対し $(AB)C=A(BC)$
(5) 任意の A に対し $AE=A$，任意の B に対し $EB=B$
(6) 任意の A,B,C に対し $A(B+C)=AB+AC$
(7) 任意の A,B,C に対し $(A+B)C=AC+BC$

命題 2.29 より，実数の 0 に対応するのが零行列 O であり，実数の 1 に対応するのが単位行列 E であることが分る。

演習問題 2.23　2 重添字に慣れるための問題

(1) 命題 2.29 を示せ

(2) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し $B=(b_{ij})$ を $b_{ij}=a_{ji}$ で定めた時，B を A の転置行列といい $B=A^T$ と表す。この時 $(AB)^T=B^TA^T$ を示せ。

(3) n 次行列 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&&&&\vdots\\0&\cdots&&0&1\\0&\cdots&&&0\end{pmatrix}$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

(1) n 次行列の零行列はまだ定義していない。次の定義参照。
(2) 次数が n のとき E_n とも書く。

(4) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。($n = 2, 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(5) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し $A^n = O$(零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

定義 2.30 n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し n 次行列 X が存在して

$$AX = E \qquad XA = E$$

となるとき X を A の**逆行列** (*inverse matrix*) という。またこのとき A は**可逆** (*invertible*) または**正則** (*non–singular*) であるという。

実際には $AX = E$ または $XA = E$ の一方の等式が成立すれば，他方の等式も成立し X が逆行列である事が分かるが，この事実は後で行列式の所で証明する。

命題 2.31 A,B が正則な行列のとき AB も正則で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

証明 A, B は正則なので逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在する。$X = B^{-1}A^{-1}$ とおくと，$(AB)X = A(BX) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E$ であり，$X(AB) = (XA)B = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E$ なので X は AB の逆行列になる。 ∎

演習問題 2.24 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

演習問題 2.25 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また正則のとき逆行列を求めよ。

演習問題 2.26 A が正則のとき A^T も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ を n 個の m 次元ベクトルの組で表すと便利なことがある。各 j ($j = 1, \ldots, n$) に対し $\boldsymbol{a}_j = (a_{ij})$ とおくと，$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n)$ と表す事ができる。(n, p) 行列 $B = (b_{ij})$

に対し $\boldsymbol{b}_j = (b_{ij})$ $(j = 1, \ldots, p)$ とおくとき，$B = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_p)$ であるが，$AB = A(\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_p) = (A\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ A\boldsymbol{b}_p)$ が成立する。

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。
これは後で定義する**線型写像** (*linear map*) になっている，即ち T_A は次の性質を持つ：
(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})$ が成立する。
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_A(\boldsymbol{x})$ が成立する。
2 次元の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 2.32 3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に関して次は同値である。
(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。
(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, $A = (\boldsymbol{a}_1 \, \boldsymbol{a}_2 \, \boldsymbol{a}_3)$ とおくとき，$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ が成立する。
(4)
(5) $A^T A = E$ が成立する。

証明は 2 次元の場合と同様なので演習問題とする。

演習問題 2.27 定理 2.32 を証明せよ。