線形解析 I 要綱 #10

2005–7–11 河野

2.9 線型写像

定義 2.33 U, V をベクトル空間とする。U から V への写像 T が次の 2 つの性質を満たすとき**線型写像** (*linear map*) という。

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$

例 2.34 (1) $U = V = \boldsymbol{R}$ とする。実数上の線型写像とは正比例の事である。T を U から V への線型写像とすると，実数 a が存在して任意の実数 x に対し $y = T(x) = ax$ が成立する。即ち実数から実数への線型写像は「正比例」である。

(2) $U = V = \boldsymbol{C}$ とする。複素数上の線型写像も (複素数の意味での) 正比例である。複素数 α が存在して，任意の複素数 z に対し $w = T(z) = \alpha z$ が成立している。これは複素平面から複素平面への写像であるから α をかけるとどうなるか考えてみよう。複素数 z は実数 x, y を用いて $z = x + iy$ と書ける。また複素数 w を実数 u, v を用いて $w = u + iv$ と書いておく。α の絶対値を r， 偏角を θ とすると，$\alpha = re^{i\theta}$ と表わされる (オイラーの公式 : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)。$w = \alpha z = re^{i\theta}z = r(\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = r(\cos\theta x - \sin\theta y) + ir(\sin\theta x + \cos\theta y)$ なので,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。つまり $e^{i\theta}$ をかける事は θ だけ回転させる事を意味し，r をかける事は原点からの距離を r 倍する事を意味する。よって複素数での正比例とは，比例定数を α とするとき，α の偏角だけ回転させ更に長さを $|\alpha|$ 倍したものである。

(3) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$, $V = \boldsymbol{R}^2$ とする。$T : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義すると T は正射影 (projection) と呼ばれる線型写像になる。

(4) $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を z 軸に関する θ 回転させたベクトルを対応させる写像とする。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が張る平行 4 辺形の対角線で与えられるベクトルが $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ である。この平行 4 辺形を θ 回転させて得られる平行 4 辺形は $T(\boldsymbol{u})$ と $T(\boldsymbol{v})$ によって張られている。この対角線は $T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ であるが，これは $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ を θ 回転させた $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ である。よって $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ が得られる。同様に $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$ が分かる。T は線型写像である。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(5) 自然数 m, n に対し，$U = \boldsymbol{K}^n$, $V = \boldsymbol{K}^m$ とする。(m, n) 行列 A を 1 つ固定する。この A に対し写像 $T_A : U \to V$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると，T_A は線型写像である。 この T_A を行列 A により定まる線型写像という。

演習問題 2.28　$T : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。このとき $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，$T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ が成立することを示せ。

例 2.34 の (5) の逆が成立する。即ち次が成り立つ。

定理 2.35 $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像 T に対し (m, n) 行列 A が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる。

証明　各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij})$ とおく。即ち $\boldsymbol{e}_i$ を基本ベクトルとする。$T(\boldsymbol{e}_i)$ は $\boldsymbol{K}^m$ のベクトルなのでこれを $T(\boldsymbol{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ と置き，更に $A = (a_{ij})$ と置く。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けるので

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}) &= T(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= A\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となり定理が成立する。 ∎

定理 2.35 の行列 A の事を線型写像 T を**表現する行列**と呼ぶ[(1)]。$\boldsymbol{K}^n$ 以外の場合の線型写像の表現についても後で扱う。

行列の積と写像の積 (合成関数) については次が成立する[(2)]。

定理 2.36 T を $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像，S を $\boldsymbol{K}^p$ から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像とする，定理 2.35 より写像 T を表現する行列を A，写像 S を表現する行列を B とすると写像 $T \circ S$ (合成写像) を表現する行列は AB である。

演習問題 2.29　定理 2.36 を証明せよ。

[(1)]行列 A と線型写像 T を同一視して，線型写像 A と言うこともある。

[(2)]行列の積を定義したとき，何故このように定義するのかということは保留した。この定理が成立するように行列の積を定義したわけである。

演習問題 2.30 　z 軸に関する θ 回転で与えられる写像を T とする。このとき T の表現行列を求めよ。

演習問題 *2.31 　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転で与えられる写像を T とする。このとき T の表現行列を求めよ。

演習問題 2.32 　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対し $T(\boldsymbol{x}_1), \ldots, T(\boldsymbol{x}_n)$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ も 1 次独立であることを示せ。

定義 2.37 U, V をベクトル空間とする T を U から V への線形写像とする。このとき

$$\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{y} \in V \mid \ \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in U \,\}$$

を線型写像 T の**像** (*imarge*) と呼ぶ。また

$$\ker(T) = \{\, \boldsymbol{x} \in U \mid \ T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}$$

を線型写像 T の**核** (*kernel*) という。$\mathrm{Im}(T) \leq V$, $\ker(T) \leq U$ が成立する ($\rightarrow$ 演習問題 2.33)。

演習問題 2.33 　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) \leq V$, $\mathrm{Ker}(T) \leq U$ を示せ。

例 2.38 A を (m, n) 行列とする。この時

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T_A) &= \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\} \\ \mathrm{Im}(T_A) &= \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid \ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \,\} \end{aligned}$$

である。具体例を考えよう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。このとき $\mathrm{Ker}(T_A)$, $\mathrm{Im}(T_A)$ を具体的に書き表してみよう。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は 4 つの 1 次方程式

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8w &= 0 \\ 9x + 10y + 11z + 12w &= 0 \\ 13x + 14y + 15z + 16w &= 0 \end{aligned}$$

で表されるが，変形すると 2 つの方程式

$$\begin{aligned} x - z - 2w &= 0 \\ y + 2z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

と同値である事が分かる。よって x,y は z,w を用いて $x=z+2w$, $y=-2z-3w$ と書けるので,

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(T_A)$ に対し

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\mathrm{Ker}(T_A)=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x-z-2w=0,\ y+2z+3w=0\right\}=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

となる。

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在することと，次の連立方程式方程式が解を持つということは同値である。

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4w &= X \\ 5x+6y+7z+8w &= Y \\ 9x+10y+11z+12w &= Z \\ 13x+14y+15z+16w &= W \end{aligned}$$

行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 5 & 6 & 7 & 8 & Y \\ 9 & 10 & 11 & 12 & Z \\ 13 & 14 & 15 & 16 & W \end{pmatrix}$ を基本変形して $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 4 & 4 & 4 & 4 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X-3Y+W \end{pmatrix}$ とできる。よって解を持つ必要十分条件は

$$X-2Y+Z=0, \qquad 2X-3Y+W=0$$

である。$\boldsymbol{y}\in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ 0 \\ -X \\ -2X \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 2Y \\ 3Y \end{pmatrix}=X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書けるので

$$\mathrm{Im}(I_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; X - 2Y + Z = 0, 2X - 3Y + W = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

演習問題 2.34　次の行列 A に対し T_A の核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ と像 $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

演習問題 *2.35　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。このとき

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

が成立する事を示せ。(ヒント: $\mathrm{Ker}(T)$ の基底と $\mathrm{Im}(T)$ の基底から U の基底を構成する。)

定義 2.39 ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像 T が 1 対 1 上への写像(3)である時 T を**同型写像** (*isomorphism*) という。2 つの線型空間の間に同型写像が存在する時 U と V は**同型** (*isomorphic*) であるといい，$U \cong V$ と書く。

U と V が同型のとき，$\dim U = \dim V$ 等，ベクトル空間としての性質はすべて等しい。

例 2.34 でいうと

(1) $a \neq 0$ のとき同型，そうでない時は同型でない。

(2) $\alpha \neq 0$ のとき同型，そうでない時同型でない。

(3) T は同型写像になる。

(3) $f : X \longrightarrow Y$ が 1 対 1 とは $f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$，上への写像とは任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事である。

(4) T は同型写像である。

(5) $m \neq n$ のときは同型写像にならない。$m = n$ のとき，A が正則行列であれば同型写像，そうでなければ同型写像でない。ただしこの事実の証明は後回しとする[4]。

演習問題 2.36 (5) を除き上で述べたことを証明せよ。

演習問題 2.37 線型写像 $T : U \to V$ が一対一である必要十分条件は $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ。

[4] 後期に線形解析 II で取り扱う。