線形解析 I 問題解説 #2

河野

演習問題 1.3　次の行列を準標準形にせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$　ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行→4 行+3 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行→4 行−1 行×4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行↔3 行}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 行→3 行−1 行×2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行→2 行−1 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行→2 行−1 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 行→3 行−1 行}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行→4 行−1 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行→4 行−2 行×3}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 行→3 行−2 行×2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行→2 行×1/5}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{2 行↔1 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行→2 行−1 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) は学生番号により異なるので省略。

演習問題 1.4　次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x+y+z+w &= a \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+z+u+v &= 1 \\ x+2y+3z+4v &= 0 \\ 2x+3y+4z+5v &= a \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 1x + 0y + 0z + 2v + 0w = 1 \\ 0x + 1y + 0z + 0v + 3w = 1 \\ 1x + 0y + 0z + 3v + 1w = 2 \\ 1x + 1y + 0z + 3v + 4w = a+3 \\ 1x + 2y + 0z + 7v + 0w = b+4 \end{cases}$

(1) 係数拡大行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ なので行基本変形を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ に変形できるので，解を持つ必要十分件は $a=1$ である。$a=1$ のとき，$y=s, z=t, w=u$ とおくと $x=1-s-t-u$ なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s-t-u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される。

(2) 係数拡大行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & a \end{pmatrix}$ なので行基本変形を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

$, \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}\times 1]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ と変形できる。ここで 3 列目と 4 列目を入れ換える列基本変形を行う。このとき 3 列目と 4 列目を入れ替えた事を記憶しておく。即ち z と u の入れ替えを行った事を記憶しておく。行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ となる。変形をここで止めてもよいが

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}+3\text{ 行}\times(-2)]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2a \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}+3\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ と変形しておく。この方程式は常に解を持つ。z と u の入れ換えを途中に行っているので，方程式は $x-u-2v=$

$2a, y+2u+3v=-a, z=1-a$ ではなく，$x-z-2v=2a, y+2z+3v=-a, u=1-a$ である。よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表す事ができる (s, t 等への置き換えは行わなかった)。

(3) z の係数がすべて 0 なので列基本変形を使わなくては準基本形に変形できない。係数拡大行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix}$ なので最初に列基本変形で $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix}$ と変形しておく。このとき 3 列目と 5 列目を入れ替えた事を記憶しておく。即ち z と w の入れ替えを行った事を記憶しておく。行基本変形を用いると $\xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-3\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & a+1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-2\text{ 行}]{}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[5\text{ 行}\to 5\text{ 行}-1\text{ 行}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}+3\text{ 行}\times(-3)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[5\text{ 行}\to 5\text{ 行}+2\text{ 行}\times(-2)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & b+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\leftrightarrow 5\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & b+7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}\times 1/11]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b+7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}+4\text{ 行}\times(-2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2b+3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b+7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}+4\text{ 行}\times 3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2b+3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{3b-1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b+7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2b+3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{3b-1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{b-4}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b+7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

となる。$a \neq 0$ のとき解を持たない。$a = 0$ のときは z と w を入れ換えている事に注意すると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2b+3}{11} \\ \dfrac{3b-1}{11} \\ 0 \\ \dfrac{b+7}{11} \\ \dfrac{b-4}{11} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。