線形解析 I 問題解説 #3

河野

演習問題 2.1　命題 2.1 を証明せよ。

定義に従って計算すればでてくる。

(2) 実数の和に関しては交換法則が成立するので，任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$

が成立する。

(3) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

かつ

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_1 \\ 0 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

が成立する。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

かつ

$$\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ -x_2 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立する。このベクトル $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ と定義すればよい。

(5) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と任意の実数 α に対し

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \alpha(x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となる。

(6) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と任意の実数 α, β に対し

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha x_2 + \beta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

が成立する。

(7) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と任意の実数 α, β に対し

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ (\alpha\beta)x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \alpha(\beta x_2) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\left(\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha\left(\beta\boldsymbol{x}\right)\end{aligned}$$

が成立する。

(8) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned}1\boldsymbol{x} &= 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 2.2　次を命題 2.1 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。

(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$

(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

最初に「任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」を示す。$0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$ が成立する。(4) より $-(0\boldsymbol{x})$ が存在して $0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ となる。$-(0\boldsymbol{x})$ を前式の両辺に加えると $0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (-(0\boldsymbol{x})) = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x}))) = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$ となる。この式の左辺は $\boldsymbol{0}$ なので証明が終わる。

(1) ここで $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\,\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立している。よって

$$-\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + (-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} + (-1)\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$$

となる。

(2) $\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}$ の両辺に $-(\alpha\mathbf{0})$ を加えると

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) = (\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}) + (-\alpha\mathbf{0}) \\ &= \alpha\mathbf{0} + (\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})) = \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0}\end{aligned}$$

となる。