線形解析 I 問題解説 #4

河野

演習問題 2.3　命題 2.4 を証明せよ。

以下ではベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とする。

(2) 実数の和に関しては交換法則が成立するので，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ y_3 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$

が成立する。

(3) $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ x_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

かつ

$$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_1 \\ 0 + x_2 \\ 0 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

が成立する。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ x_3 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

かつ

$$\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ -x_2 + x_2 \\ -x_3 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が成立する。このベクトル $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ と定義すればよい。

(5) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し

$$
\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) \\ \alpha(x_2+y_2) \\ \alpha(x_3+y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \alpha x_2+\alpha y_2 \\ \alpha x_3+\alpha y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \alpha y_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

となる。

(6) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)x_2 \\ (\alpha+\beta)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta x_1 \\ \alpha x_2+\beta x_2 \\ \alpha x_3+\beta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \\ \beta x_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

が成立する。

(7) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ (\alpha\beta)x_2 \\ (\alpha\beta)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \alpha(\beta x_2) \\ \alpha(\beta x_3) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \\ \beta x_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\left(\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha\left(\beta\boldsymbol{x}\right)
\end{aligned}
$$

が成立する。

(8) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\begin{aligned} 1\boldsymbol{x} &= 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1x_2 \\ 1x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 2.4　次を命題 2.4 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。
(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$
(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

最初に「任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$」を示す。$0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$ が成立する。(4) より $-(0\boldsymbol{x})$ が存在して $0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ となる。$-(0\boldsymbol{x})$ を前式の両辺に加えると $0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (-(0\boldsymbol{x})) = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x}))) = 0\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}$ となる。この式の左辺は $\mathbf{0}$ なので証明が終わる。
(1) ここで $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\,\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成立している。よって

$$-\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = -\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + (-1)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} + (-1)\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$$

となる。
(2) $\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}$ の両辺に $-(\alpha\mathbf{0})$ を加えると

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) = (\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}) + (-\alpha\mathbf{0}) \\ &= \alpha\mathbf{0} + (\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})) = \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.5　命題 2.6 を証明せよ。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ x_3 + x'_3 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) &= (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + (x_3 + x'_3)y_3 \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x'_1y_1 + x'_2y_2 + x'_3y_3 \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となる。

(2) $\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + (\alpha x_3)y_3 \\ &= \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となる。
(5)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 \\ &= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となる。
(3) (1) と (5) を用いて

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') &= (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')\end{aligned}$$

となる。
(4) (2) と (5) を用いて

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) &= (\alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ &= \alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ &= \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となる。
(6)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^2 \\ &= |\boldsymbol{x}|^2\end{aligned}$$

演習問題 2.6　命題 2.10 を証明せよ。

$\boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i), \boldsymbol{w} = (w_i) \in \boldsymbol{R}^n$ とし，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ とする。
(1) ベクトルのかっこと和のかっこの違いに注意。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} &= ((u_i) + (v_i)) + (w_i) \\ &= (u_i + v_i) + (w_i) \\ &= ((u_i + v_i) + w_i) \\ &= (u_i + (v_i + w_i)) = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (u_i+v_i)=(v_i+u_i) \\ &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

(3) すべての成分が 0 であるベクトルを $\mathbf{0}$ とする。$\mathbf{0}=(0)$ と書いてもよいが，i 番目の成分が 0 という事を強調したいので次の様に書く；任意の i に関して $z_i=0$ と定義し $\mathbf{0}=(z_i)$ と書く。任意の実数 x に対し，$x+z_i=x$ が成立している。よって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}+\mathbf{0} &= (v_i)+(z_i) \\ &= (v_i+z_i) \\ &= (v_i) \\ &= \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

が成立する。
(4) ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ に対し $\boldsymbol{v}'=(-v_i)$ と定義すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' &= (v_i)+(-v_i) \\ &= (v_i+(-v_i)) \\ &= (z_i) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。
(5)

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= \alpha\left((u_i)+(v_i)\right) \\ &= \alpha(u_i+v_i) \\ &= (\alpha(u_i+v_i)) \\ &= (\alpha u_i+\alpha v_i) \\ &= (\alpha u_i)+(\alpha v_i) \\ &= \alpha(u_i)+\alpha(v_i) \\ &= \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)\boldsymbol{v} &= (\alpha+\beta)(v_i) \\ &= ((\alpha+\beta)v_i) \\ &= (\alpha v_i+\beta v_i) \\ &= (\alpha v_i)+(\beta v_i) \\ &= \alpha(v_i)+\beta(v_i) \\ &= \alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\boldsymbol{v} &= (\alpha\beta)(v_i) \\
&= ((\alpha\beta)v_i) \\
&= (\alpha(\beta v_i)) \\
&= \alpha(\beta v_i) \\
&= \alpha\left(\beta(v_i)\right) \\
&= \alpha(\beta\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
1\boldsymbol{v} &= 1(v_i) \\
&= (1v_i) \\
&= (v_i) \\
&= \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$