線形解析 I 問題解説 #5

河野

演習問題 2.7　次の各 V でベクトル空間 (部分空間) になるものはどれか。証明をつけて答えよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$

(6) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$

(7) $V = \boldsymbol{R}^3$

(8) $V = \{\boldsymbol{0}\}$

ベクトル空間になるための 3 つの条件— (1) $V \neq \emptyset$, (2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$, (3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\alpha \boldsymbol{v} \in V$ — をチェックすればよい。1 つでも成り立たなければベクトル空間ならないのでその段階で他の条件を調べる必要はない。演習問題 2.9 を用いて (1) の条件の代わりに (1') $\boldsymbol{0} \in V$ を示してもよい。

(1) $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $0-0+0=0$ となるので $\boldsymbol{0} \in V$ となる。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 及び $y_1 - y_2 + y_3 = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$

なので $(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1-x_2+x_3)+(y_1-y_2+y_3)=0+0=0$ が得られ，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ となる。

$\boldsymbol{K}$ の任意のスカラー α と V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ となるので，$\alpha x_1-\alpha x_2+\alpha x_3=\alpha(x_1-x_2+x_3)=\alpha 0=0$ となり $\alpha\boldsymbol{x}\in V$ が分かる。

(2) $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0-0+0=0\neq 1$ なので $\boldsymbol{0}\notin V$ となる。条件 (1') が成立しないので，(2), (3) をチェックするまでもなくベクトル空間ではない。

(3) $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0=0$ 及び $0-3\times 0=0$ が成立しているので $\boldsymbol{0}\in V$ である。

V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2=0, x_2-3x_3=0$ 及び $y_1+y_2=0, y_2-3y_3=0$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ なので $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0+0=0$, $(x_2+y_2)-3(x_3+y_3)=(x_2-3x_3)+(y_2-3y_3)=0+0=0$ が得られ，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ となる。

$\boldsymbol{K}$ の任意のスカラー α と V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ となるので，$\alpha x_1+\alpha x_2=\alpha(x_1+x_2)=\alpha\times 0=0$, $\alpha x_2-3\alpha x_3=\alpha(x_2-3x_3)=\alpha\times 0=0$ となり $\alpha\boldsymbol{x}\in V$ が分かる。

(4) (3) と同様にできるので省略。

(5) $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0=0=0\times 0$ となるので $\boldsymbol{0}\in V$ となる。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $1+0=1=1\times 1$ となるので $\boldsymbol{x}\in V$ となる。しかし $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので $2+0=2\neq 2\times 2$ となり，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\notin V$ である。(2) が成立しないのでベクトル空間ではない。

(6) $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0\times 0=0\times 0$ となるので $\boldsymbol{0}\in V$ である。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $1\times 0=0\times 1$ なので $\boldsymbol{x}_1\in V$ となる。また $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して $1\times 1=1\times 1$ となるので $\boldsymbol{x}_2\in V$ である。

$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ なので $2\times 1=2\neq 1\times 1$ となり $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\notin V$ となる。(2) が成立しないので V はベクトル空間ではない。

この例の V は (2) は満たしませんが，(3) は満たします。追加の問題 [*] として (1) と (2) を満たし (3) を満たさないような例を考えて下さい。

(7) これは容易なので省略。

(8) 講義の時にも説明しましたが，これも立派なベクトル空間になります。 $\mathbf{0}\in\{\mathbf{0}\}$ は成立する。任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\{\mathbf{0}\}$ に対し $\{\mathbf{0}\}$ の元は $\mathbf{0}$ しかないので，任意に選んでも $\mathbf{0}$ を選ぶしかない。よって $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ となっている。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ なので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\{\mathbf{0}\}$ となっている。$\boldsymbol{K}$ の任意のスカラー α と $\{\mathbf{0}\}$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ なので $\alpha\boldsymbol{x}=\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}\in\{\mathbf{0}\}$ となる。以上により $\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間になる。

演習問題 2.8　次の各 V がベクトル空間になる事を示せ。

$$(1)\ V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4\ \middle|\ x-y+z-w=0\right\}$$

$$(2)\ V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4\ \middle|\ x+y-z+w=0, x-y+z-w=0\right\}$$

$$(3)\ V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\\t\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^5\ \middle|\ p+q+r+s+t=0, p-q+r=0\right\}$$

このタイプの問題には前問で慣れたと思われるので (1) 以外は省略します。$\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{K}$ に変わっても同じです。 $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ に対し $0-0+0-0=0$ なので $\mathbf{0}\in V$ となる。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\w'\end{pmatrix}$ に対し $x-y+z-w=0$ 及び $x'-y'+z'-w'=0$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\\w+w'\end{pmatrix}$ なので $(x+x')-(y+y')+(z+z')-(w+w')=(x-y+z-w)+(x'-y'+z'-w')=0+0=0$ が得られ，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ となる。

$\boldsymbol{K}$ の任意のスカラー α と V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \\ \alpha w \end{pmatrix}$ となるので，$\alpha x - \alpha y + \alpha z - \alpha w = \alpha(x - y - z + w) = \alpha 0 = 0$ となり $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ が分かる。

演習問題 2.9　$\boldsymbol{K}^n$ の部分集合 V が (2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$, 及び (3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\alpha\boldsymbol{v} \in V$ を満たすとする。このとき (1) $V \neq \emptyset$ という条件と (1') $\boldsymbol{0} \in V$ という条件は同値である事，すなわち (1) は (1') であるための必要十分上である事を示せ。

(1') が成立しているとき V は空集合ではないので (1) が従う。

今 (1) 及び (3) が成立しているとする。あるベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in V$ が存在する。ここで $0 \in \boldsymbol{K}$ なので，(3) より $0\boldsymbol{x}_0 \in V$ であるが，$0\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{0} \in V$ となる。問題では (2) の成立も仮定したが，証明を見れば分かるように，(2) はなくても，命題は成立する。

演習問題 2.10　ベクトル空間 V と V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ について $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ が V の部分空間になる事を示せ。

$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{x}_k \in \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ なので (1') は成立する。

任意の $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ に対し，スカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ が存在して，$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k$ と書かれている。同様に任意の $\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ に対し，スカラー $\beta_1, \ldots, \beta_k$ が存在して，$\boldsymbol{y} = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots \beta_k\boldsymbol{x}_k$ と書けている。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k) + (\beta_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots \beta_k\boldsymbol{x}_k) = (\alpha + \beta_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots (\alpha_k + \beta_k)\boldsymbol{x}_k$$

となるので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ となる。

任意の $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ に対し，スカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ が存在して，$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k$ と書かれている。任意のスカラー α に対し

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k) = (\alpha\alpha_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_k)\boldsymbol{x}_k$$

となるので $\alpha\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ となる。

演習問題 2.11　上の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が張る平面上の点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対しある実数 a, b が存在して $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ となることを示せ。

最初に $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に直行するベクトルを 1 つ見つける。ベクトル $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と直行するベクトルとすると，内積は 0 なので $p + 2q + 3r = 0$ が成立している。また $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とも直行しているとすると，$0p + 1q + 0r = 0$ が成立している。直行するベクトルは $q = 0$，$p + 3r = 0$ を満たしている。よって $p = 3, r = -1$ を選ぶ。

$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平面上のベクトルとすると，$\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{h}$ と直行している。よって内積は $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}) = 3x - z = 0$ となる。よって

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。ここで $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}$ に注意すると，

$$\boldsymbol{z} = x(\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}) + y\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{x} + (y - 2x)\boldsymbol{y}$$

となる。よって $a = x, b = y - 2x$ とすればよい。

演習問題 2.12　次の部分空間 ($\boldsymbol{K}^3$ の部分空間と考えている) で等しいものはどれか，異なるものはどれか，理由をつけて答えよ。ただし
$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $W_1 = \{\boldsymbol{0}\}$　(2) $W_2 = \langle \boldsymbol{x}_0 \rangle$　(3) $W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle$
(4) $W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$　(5) $W_5 = \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$　(6) $W_6 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$
(7) $W_7 = \langle \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_5 \rangle$　(8) $W_8 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$　(9) $W_9 = \boldsymbol{K}^3$

(10) $W_{10} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(11) $W_{11} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(12) $W_{12} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0 \right\}$

2 つの集合 A, B に対し $A = B$ を示すためには，$A \subseteq B$ および $B \subseteq A$ の 2 つを示せばよい。$A \subseteq B$ を示すためには A の任意の元 a が B の元になっていることを示せばよい。

最初に次が成立することを確認しておく；ベクトル空間 W に対し $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in W$ ならば $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle \subseteq W$ である。

結論を先に述べておく。$W_1 = W_2 = W_{12}$，$W_3 = W_5 = W_{11}$，$W_4 = W_6 = W_8 = W_{10}$，$W_7 = W_9$ であり，それぞれの集合は異なる。

最初に W_1 から W_9 に関して議論する。

$\boldsymbol{x}_3 \in W_5$ なので $W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq W_5$ となる。$\boldsymbol{x}_3 \in W_3$ であり，また $\boldsymbol{x}_4 = -2\boldsymbol{x}_3$ より $\boldsymbol{x}_4 \in W_3$ となる。これより $W_5 = \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle \subseteq W_3$ となる。2 つをあわせて $W_3 = W_5$ が分かる。

$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ は成立している。$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 - 2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2$ となるので，$\boldsymbol{x}_3 \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。また $\boldsymbol{x}_4 = -2\boldsymbol{x}_3$ なので $\boldsymbol{x}_4 \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ である。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり，$W_4 = W_6 = W_8$ が分かる。

$\mathbf{0} \in W_2$ なので $W_1 = \{\mathbf{0}\} \subseteq W_2$ となっている。逆に任意の $\boldsymbol{x} \in W_2$ はあるスカラー a を用いて $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_0$ と書かれている。$\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x} = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x} \in W_1$ となる。よって $W_1 = W_2$ である。

$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5 \in \boldsymbol{K}^3$ なので $W_7 = \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5 \rangle \subseteq \boldsymbol{K}^3 = W_9$ である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{K}^3$ の任意のベクトルとする。

$$\boldsymbol{x} = \frac{z-2y}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y+z}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので $\boldsymbol{x} \in W_7$ よって $\boldsymbol{K}^3 \subseteq W_7$ である。前とあわせて $W_7 = \boldsymbol{K}^3 = W_9$ が分かる。

次に W_{10} から W_{12} を調べる。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_{10}$ なので $W_4 \subseteq W_{10}$ となる。W_{10} の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は $x_1 + x_2 = 0$ を満たしているので,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

より $\boldsymbol{x} = (x_1 - x_3)\boldsymbol{x}_1 + x_3\boldsymbol{x}_2$ となり $\boldsymbol{x} \in W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。よって $W_{10} \subseteq W_4$ となり $W_4 = W_{10}$ となる。

$\boldsymbol{x}_3 \in W_{11}$ より $W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq W_{11}$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を W_{11} の任意のベクトルとすると，$x\_1 - x_2 + x_3 = 0$ および $x_1 + x_2 = 0$ を満たしているので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{x}_3$$

となるので $\boldsymbol{x} \in W_3$ となる。よって $W_{11} \subseteq W_3$ となり $W_3 = W_{11}$ となる。

$\mathbf{0} \in W_{12}$ より $W_1 \subseteq W_{12}$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を W_{12} の任意のベクトルとすると，$x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ，$x_1 + x_2 = 0$ および $x_2 + x_3 = 0$ を満たしている。この連立 1 次方程式を解くと $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので $\boldsymbol{x} \in W_1$，よって $W_1 = W_{12}$ である。

等号は示したので等号不成立を示す。$\boldsymbol{x}_3 \neq \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x}_3 \notin W_1$ かつ $\boldsymbol{x}_3 \in W_3$ である。よって $W_1 \neq W_3$ である。$\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1 \notin W_1$ かつ $\boldsymbol{x}_1 \in W_4$ である。よって $W_1 \neq W_4$ である。$\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1 \notin W_1$ かつ $\boldsymbol{x}_1 \in W_9$ である。よって $W_1 \neq W_9$ である。

$\boldsymbol{x}_2 \notin W_{11}$ かつ $\boldsymbol{x}_2 \in W_4$ なので $W_{11} \neq W_4$ である。$\boldsymbol{x}_2 \notin W_{11}$ かつ $\boldsymbol{x}_2 \in W_9$ なので $W_{11} \neq W_9$ である。$\boldsymbol{x}_5 \notin W_4$ かつ $\boldsymbol{x}_2 \in W_9$ なので $W_4 \neq W_9$ である。