線形解析 I 問題解説 #6

河野

演習問題 2.13 　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ 　　(a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ 　　(a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

(7) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

ここでは (1)(4)(6) についてのみ解説しておく。

(1) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとすると，c_1, c_2 は連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ c_1 & & & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

の解である。この連立方程式を解くと $c_1 = 0, c_2 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である。

(4) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_2\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとすると，c_1, c_2, c_3 は連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & & & = & 0 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

の解である。この連立方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。例えば $c_3 = 1$ とすると，$c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 1$ はこの連立方程式の解である。よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立でない。

(6) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_2\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとすると，c_1, c_2, c_3 は連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + pc_3 = 0 \\ 3c_1 + qc_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$$

の解である。この連立方程式を変形して同値な連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \quad + (p-2)c_3 = 0 \\ (q-3)c_2 = 0 \end{cases}$$

を得る。

$p = 2$ のとき，この連立方程式は $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$ を解に持つ。$q = 3$ のとき，この連立方程式は $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$ を解に持つ。$p \neq 2$ かつ $q \neq 3$ のときこの連立方程式の解は $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ のみである。以上により $p = 2$ または $q = 3$ のとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立でなく，$p \neq 2$ かつ $q \neq 3$ のとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である。

演習問題 2.14 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立とする。$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ に対し，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立かどうか調べよ。

また $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1$, に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

更に $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$ に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

最初の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ について: $c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ は

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + c_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{0}$$

なので

$$(c_1 + c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_1 + (c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

を意味する。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の 1 次独立性より $c_1 + c_2 + c_3 = 0, c_2 + c_3 = 0, c_3 = 0$ が得られるが，この連立方程式を解くと $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

次の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ について: $c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ は

$$c_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + c_2(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) + c_3(\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$$

なので

$$(c_1 + c_3)\boldsymbol{x}_1 + (c_1 + c_2)\boldsymbol{x}_2 + (c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

を意味する。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の 1 次独立性より $c_1 + c_3 = 0, c_1 + c_2 = 0, c_2 + c_3 = 0$ が得られるが，この連立方程式を解くと $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

最後の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ について: $c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ は

$$c_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) + c_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + c_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{0}$$

なので

$$(c_1 - c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_1 + (c_2 - c_1)\boldsymbol{x}_2 + +c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

を意味する。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の 1 次独立性より $c_1 - c_2 + c_3 = 0, c_2 - c_1 = 0, c_3 = 0$ が得られる。この連立方程式は $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$ という解を持つ。よって $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立ではない。

演習問題 2.15　次を示せ。

ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で必要十分条件は「任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し,

$$\{\boldsymbol{0}\} \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

が成立することである。

最初に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であると仮定する。ある i に対し $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+1} \rangle$ が成立したとする。$\boldsymbol{v}_{i+1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle$ なので，スカラー $a_1, \ldots, a_i$ が存在して

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_i\boldsymbol{v}_i$$

と書ける。このとき

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_i\boldsymbol{v}_i + (-1)\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{0}$$

となるので $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+1}$ の 1 次独立性に反する。よって各 i に対し $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+1} \rangle$ が成立する。

逆に各 i に対し $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+1} \rangle$ が成立しているとする。今

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。$c_n \neq 0$ と仮定すると

$$\boldsymbol{v}_n = -\frac{c_1}{c_n}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)\boldsymbol{v}_{n-1}$$

が成立するので $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ となる。これは矛盾なので $c_n = 0$ となる。同様の議論を $n-1, n-2, \ldots$ と進めて行くと $c_{n-1} = 0, c_{n-2} = 0, \ldots$ が分かる。よって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である。

演習問題 2.16　次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V = \boldsymbol{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $V = \boldsymbol{C}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $V=\boldsymbol{K}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(4) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(5) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^3 \;\middle|\; x-2y+z=0\right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

(6) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(7) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x-y+z+w=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

(8) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0, x-2y+z=0\right\}$ で (1 個のベクトルからなる) ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(9) $V=\boldsymbol{K}^n$ で，ベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$

(3)(7) のみ解説しておく。

(3) 最初に 1 次独立性を示す。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると c_1,c_2,c_3 は連立方程式

$$\begin{cases} c_1+ & c_2 & + & c_3 & = & 0\\ c_1+ & 2c_2 & & & = & 0\\ c_1+ & 3c_2 & + & c_3 & = & 0\end{cases}$$

の解である。この連立方程式を解くと $c_1=c_2=c_3=0$ となるので 1 次独立性は示された。

次にこれらのベクトルの組が $V=\boldsymbol{K}^3$ を生成する事を示す。$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3$ なので $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\subseteq\boldsymbol{K}^3$ は成立している。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^2$ を任意のベクトル

とする。ここで予備的計算。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立しているとして a, b, c を決定する。連立方程式

$$\begin{cases} a+ & b & + & c & = & x \\ a+ & 2b & & & = & y \\ a+ & 3b & + & c & = & z \end{cases}$$

を解くと

$$a = x + y - z,\ b = \frac{z-x}{2},\ c = \frac{x+z}{2} - y$$

を得る。この青字の部分は解答に含めなくてもよい。このベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し

$$(x+y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{z-x}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{x+z}{2} - y\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となるので $\boldsymbol{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。$\boldsymbol{K}^3 \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となるので前の結果とあわせて $\boldsymbol{K}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。

以上により $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{K}^3$ の基底である。

(7)

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立しているとすると，c_1, c_2c_3 に関する連立方程式を解くと $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が得られる。よってこれらのベクトルは 1 次独立である。

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$ なので $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq V$ が成立している。

V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対し $x - y + z + w = 0$ が成立している。このとき

$$\frac{z+w}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z-w}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z+w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

となるので $\boldsymbol{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が成立する。よって $V \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

となり，前とあわせて $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が成立する。

以上により $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は V の基底である。

演習問題 2.17　次の部分空間の基底を 1 組求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(6) $V=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x_1+4x_2+x_3=0, 2x_1+3x_2+2x_3=0, x_1-x_2+x_3=0 \right\}$

(7) $V=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(9) $V=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

(4) と (9) のみ解説する。

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

を変形すると

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

となる。よって解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3-4x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であることを示す。

(1) 1 次独立性：$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ とすると $c_1=c_2=0$ が成立するので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。

(2) 生成：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ となる。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 4x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \boldsymbol{x}_1 + x_3 \boldsymbol{x}_2$$

と書けるので，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。よって $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり，前とあわせて $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が示させる。

(9) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ とおくとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であることを示す。

(1) 1 次独立性：$c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると $c_1 = c_2 = 0$ が成立するので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。

(2) 生成：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ となる。$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_1 + 2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_1 + 3(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = -2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

となり $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。よって $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ であり，前とあわせて $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が示させる。