線形解析 I 問題解説 #7

河野

演習問題 2.18　次のベクトル空間の次元を求めよ。

(1) $V = \boldsymbol{K}^2$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$

(4) $V = \boldsymbol{K}^3$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(6) $V = \boldsymbol{K}^4$

(7) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$

(8) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x + 4y - z + w = 0 \right\}$

(9) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(10) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(11) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

(12) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

次元とは基底を構成するベクトルの個数なので基底を 1 組見つければよい。(8) と (12) のみ解説しておく。

(8) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が基底であることを示す。これが示されれば V の次元は 3 であることが分かる。

$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in V$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq V$ となる。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y + z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle = V$ となり $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V を生成する。

(12) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおくとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が基底であることを示す。これが示されれば V の次元は 2 であることが分かる。

$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると $c_1 = c_2 = 0$ となるので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ となる。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2$$

となるので $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。よって $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立するので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = V$ となり $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V を生成する。