線形解析 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.19　任意の 2 次行列 A と単位行列 E に対し $AE = EA = A$ が成立する事を示せ。

これは定義にしたがって計算するだけです。行列のかけ算ができるかどうかの問題です。
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とする。

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}1 + a_{12}0 & a_{11}0 + a_{12}1 \\ a_{21}1 + a_{22}0 & a_{21}0 + a_{22}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a_{11} + 0a_{21} & 1a_{12} + 0a_{22} \\ 0a_{11} + 1a_{21} & 0a_{12} + 1a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

演習問題 2.20　任意の行列 A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$ 及び $(A+B)C = AC+BC$(分配法則) が成立する事を示せ。

これもかけ算ができるかどうかを見る問題です。$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおいて両辺を計算すればできます。

演習問題 2.21　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないことを示せ。

A が逆行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を持つとすると $AB = E$ が成立している。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立しているので

$$0 = 2a + 4c = 2(a+2c) = 2 \times 1 = 2$$

となり矛盾，よって A は逆行列を持たない。

演習問題 2.22　$A = B(\theta)$ のとき $A^T A = E$ を示せ。

$A = B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ なので $A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ である。よって

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

なので $A^A = E$ が成立する。