線形解析 I 問題解説 #9

河野

演習問題 2.23　2 重添字に慣れるための問題

(1) 命題 2.29 を示せ

(2) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し $B=(b_{ij})$ を $b_{ij}=a_{ji}$ で定めた時，B を A の転置行列といい $B=A^T$ と表す。この時 $(AB)^T=B^TA^T$ を示せ。

(3) n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

(4) n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。($n=2,3,4$ 等で試算してみよ)。

(5) $i \geqq j$ の時 $a_{ij}=0$ であるような n 次行列 $A=(a_{ij})$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

(1) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ という行列の表記法でも勿論証明はできるが，ここでは $A=(a_{ij})$ という表記法を用いる。$A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$ とおく。

(1) 和の括弧と行列表示の括弧を区別すること! ここではそれを区別するため行列の括弧を黒で，和の括弧を緑で書いておく。これより後の問題は自分で判断すること。

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= \big((a_{ij})+(b_{ij})\big)+(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) \\ &= \big((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\big)=\big(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\big) \\ &= (a_{ij})+\big(b_{ij}+c_{ij}\big)=A+(B+C)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}A+B &= (a_{ij})+(b_{ij})=\big(a_{ij}+b_{ij}\big)=\big(b_{ij}+a_{ij}\big) \\ &= (b_{ij})+(a_{ij})=B+A\end{aligned}$$

(3) 任意の i, j に対し $z_{ij} = 0$ とおくと $O = (z_{ij})$ なので

$$
\begin{aligned}
A + O &= (a_{ij}) + (z_{ij}) = (a_{ij} + z_{ij}) \\
&= (a_{ij}) = A
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= ((a_{ij})(b_{ij}))\,(c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)(c_{ij}) \\
&= \left(\sum_{\ell=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell}\right) c_{\ell j}\right) = \left(\sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell} c_{\ell j}\right) \\
&= (a_{ij})\left(\sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} c_{\ell j}\right) = A(BC)
\end{aligned}
$$

ただし A は (m, n) 行列，B は (n, p) 行列，C は (p, q) 行列として計算した。

(5)

$$
\begin{aligned}
AE &= (a_{ij})(\delta_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} \delta_{sj}\right) \\
&= (a_{ij}) = A \\
EB &= (\delta_{ij})(b_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{p} \delta_{is} b_{sj}\right) \\
&= (b_{ij}) = B
\end{aligned}
$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり，A は (m, n) 行列，B は (n, p) 行列として計算した。

(6)

$$
\begin{aligned}
A(B + C) &= (a_{ij})\,((b_{ij}) + (c_{ij})) = (a_{ij})(b_{ij} + c_{ij}) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}(b_{sj} + c_{sj})\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} + \sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sj}\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sj}\right) = AB + AC
\end{aligned}
$$

ただし A は (m, n) 行列，B, C は (n, p) 行列として計算した。

(7)

$$
\begin{aligned}
(A + B)C &= ((a_{ij}) + (b_{ij}))\,(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})(c_{ij}) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n}(a_{is} + b_{is}) c_{sj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sj} + \sum_{s=1}^{n} b_{is} c_{sj}\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sj}\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} b_{is} c_{sj}\right) = AC + BC
\end{aligned}
$$

ただし A,B は (m,n) 行列，C は (n,p) 行列として計算した。

(2) 転置行列の定義に用いる B と一般の n 次行列の B がまぎらわしいですね。すいません。転置行列の定義に出てくる $B=(b_{ij})$ は $b_{ij}=a_{ji}$ という関係があるが，$(AB)^T=B^TA^T$ の $B=(b_{ij})$ は a_{ij} と関係がないと考えてください。A,B は n 次行列とする。$AB=(c_{ij})$ とおくと，$c_{ij}=\displaystyle\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}$ である。よって $(AB)^T$ の (i,j) 成分は $c_{ji}=\displaystyle\sum_{s=1}^{n}a_{js}b_{si}$ である。$A^T=(a_{ji}),B^T=(b_{ji})$ なので B^TA^T の (i,j) 成分は

$$\sum_{s=1}^{n}b_{si}a_{js}=\sum_{s=1}^{n}a_{js}b_{is}=c_{ij}$$

である。よって $(AB)^T=B^TA^T$ となる。

(3) $j-i=k$ のとき $a_{ij}^{(k)}=1$，$j-i\neq k$ のとき $a_{ij}^{(k)}=0$ と定義し，$A(k)=(a_{ij}^{(k)})$ と定義する。この問題の A は $A=A(1)$ となっている。

具体例を幾つか計算することにより $A(k)A(\ell)=A(k+\ell)$ が予想されるので，これを証明する。$A(k)A(\ell)$ の (i,j) 成分を b_{ij} とすると，$b_{ij}=\displaystyle\sum_{s=1}^{n}a_{is}^{(k)}a_{sj}^{(\ell)}$ となる。$a_{is}^{(k)}$ は $s-i=k$ となるときのみ 1 で，それ以外は 0 なので $b_{ij}=a_{i\,i+k}^{(k)}a_{i+k\,j}^{(\ell)}=a_{i+k\,j}^{(\ell)}$ となる。$a_{i+k\,j}^{(\ell)}$ は $j-(i+k)=\ell$ のとき 1，それ以外は 0 なので，b_{ij} は $j-i=k+\ell$ のとき 1，$j-i\neq k+\ell$ のとき 0 となる。よって $b_{ij}=a_{ij}^{(k+\ell)}$ となる。以上で $A(k)A(\ell)=A(k+\ell)$ が示された。

$A^2=A(1)A(1)=A(1+1)=A(2)$ が成立する。帰納的に $A^m=A(m)$ が証明できる (各自数学的帰納法で証明せよ)。$m\geqq n$ のとき $A(m)=O$ (零行列) なので $A^n=A(n)=O$ が成立する。

(4) 具体例で幾つか計算すると $A^2=E$ が予想されるのでこれを証明する。

$A=(a_{ij})$ とおくと $i+j=n$ のとき $a_{ij}=1$，$i+j\neq n$ のとき $a_{ij}=0$ が成立している。$A^2=(b_{ij})$ とおくと $b_{ij}=\displaystyle\sum_{s=1}a_{is}a_{sj}$ であるが，$i+s=n$ のとき $a_{is}=1$，$i+s\neq n$ のとき $a_{is}=0$ なので，$b_{ij}=a_{i\,n-i}a_{n-i\,j}=a_{n-i\,j}$ となる。$(n-i)+j=n$ のとき，即ち $i=j$ のとき $a_{n-i\,j}=1$ であり，$(n-i)+j\neq n$ のとき，即ち $i\neq j$ のとき $a_{n-i\,j}=0$ なので $b_{ij}=\delta_{ij}$ となり (ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) $A^2=E$ となる。

よって A^n は n が偶数のときは E，奇数のときは A となる。

(5) 行列 $A=(a_{ij})$ が $j-i<k$ のとき $a_{ij}=0$ となっているとき，その行列をタイプ k と呼ぶことにする。具体例で計算すると，タイプ k の行列とタイプ ℓ の行列の積はタイプ $k+\ell$ の行列になっていると予想されるのでこれを証明する。$A=(a_{ij})$ をタイプ k の行列，$B=(b_{ij})$ をタイプ ℓ の行列とし，$AB=(c_{ij})$ とする。$c_{ij}=\displaystyle\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}$ であるが，$s-i<k$ のとき $a_{is}=0$ なので，和は $s-i\geqq k$ となる s に関してのみとればよい。同様に $j-s<\ell$ のとき $b_{sj}=0$ なので，和は $j-s\geqq\ell$ となる s に関してとればよい。よって $c_{ij}=\displaystyle\sum_{k+i\leqq s\leqq j-\ell}a_{is}b_{sj}$ となる。$j-s<k+\ell$ のとき条件を満たす s は存在しないので $c_{ij}=0$ となる。よって AB はタイプ $k+\ell$ である。

A はタイプ 1 なので A^2 はタイプ 2 である。帰納的に A^m はタイプ m であることが証明される (各自数学的帰納法で証明すること)。$m \geqq n$ のときタイプ m の行列は O (零行列) のみなので $A^n = O$ が成立する。

演習問題 2.24 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

A が逆行列 $B = (b_{ij})$ を持つと仮定すると $AB = E$ が成立している。AB の $(1,1)$ 成分は ab_{11} であり，E の $(1,1)$ 成分は 1 である。よって $ab_{11} = 1$ が成立している。$a = 0$ ならこのような b_{11} は存在しないので $a \neq 0$ である。同様に $(2,2)$ 成分を比較することにより $d \neq 0$ が，$(3,3)$ 成分を比較することにより $f \neq 0$ が分かる。

逆に $a \neq 0, d \neq 0, f \neq 0$ のとき，$B = (b_{ij})$ とおき連立 1 次方程式 $AB = E$ を解くと，$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$ が得られる。よって逆行列を持つ必要十分条件は $a \neq 0$ かつ $d \neq$ かつ $f \neq 0$ であり，逆行列は上述のものとなる。

演習問題 2.25 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また正則のとき逆行列を求めよ。

前問と同様に考えれば，逆行列を持つ必要十分条件は，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ かつ $d \neq 0$ であり，逆行列は

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{f} & -\frac{1}{ab} & \frac{1-bx}{abc} & \frac{-1+cz+bx-bcy}{abcd} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} & \frac{1-cz}{bcd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & -\frac{1}{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 2.26　A が正則のとき A^T も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

A の逆行列を B とすると $AB = BA = E$ が成立している。3 辺の転置行列をとると演習問題 2.23 (2) より $(AB)^T = B^T A^T$ および $(BA)^T = A^T B^T$ が成立している。$E^T = E$ であることに注意すれば，$B^T A^T = A^T B^T = E$ が成立する。この等式は A^T の逆行列が B^T であることを示している。即ち $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ が成立する。

演習問題 2.27　定理 2.32 を証明せよ。

(1) $\Longrightarrow$ (2)： $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$ 及び $|T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})|^2 = (T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})) = |T_A(\boldsymbol{x})|^2 + 2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + |T_A(\boldsymbol{y})|^2$ は常に成立している。(1) を仮定すると，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|$ 及び $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|, |T_A(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{y}|$ が成立しているので，$|T_A(\boldsymbol{x})|^2 + 2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + |T_A(\boldsymbol{y})|^2 = |T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$ より $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が分かる。

上の証明は定理 2.28 の証明の対応部分をコピーしたものである。この様に，成分表示によらない場合は次元によらず証明できる場合がある。

(2) $\Longrightarrow$ (3)： $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{a}_1 = T_A(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{a}_2 = T_A(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{a}_3 = T_A(\boldsymbol{e}_3)$ が成立している。よって $|\boldsymbol{a}_1|^2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1$, $|\boldsymbol{a}_2|^2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = (T_A(\boldsymbol{e}_2), T_A(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$, $|\boldsymbol{a}_3|^2 = (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) = (T_A(\boldsymbol{e}_3), T_A(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 0$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (T_A(\boldsymbol{e}_2), T_A(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0$, が成立する事が分かる。

(3) $\Longrightarrow$ (5)：

$$
\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} & a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。

別解：　ベクトルを行列とみなせば，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}$ となっている。ただしここで 1 行 1 列の行列とスカラーを同一視している。$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ なので $A^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \boldsymbol{a}_3^T \end{pmatrix}$ となって

いる。

$$A^TA = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \boldsymbol{a}_3^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(5) $\Longrightarrow$ (1)： $A^TA = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し，

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} |T_A(\boldsymbol{x})|^2 &= (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) \\ &= (x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3, x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3) \\ &= x_1^2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + x_2^2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) + x_3^2(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) \\ &\quad +2x_1x_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + 2x_1x_3(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) + 2x_2x_3(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\boldsymbol{x}|^2 \end{aligned}$$

となり，(1) が成立する。