線形解析 I 問題解説 #10

河野

演習問題 2.28　$T : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。このとき $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，$T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ が成立することを示せ。

$\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0}$ なので $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0})$ が成立する。両辺から $T(\mathbf{0})$ を引くと $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が得られる。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ が成立しているので，$T(-\boldsymbol{x}) = T((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)T(\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ となる。

演習問題 2.29　定理 2.36 を証明せよ。

A を線型写像 T の表現行列とすると任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $T(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y}$ が成立している。B を線型写像 S の表現行列とすると，任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^p$ に対し $S(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^p$ に対し

$$T \circ S(\boldsymbol{x}) = T(S(\boldsymbol{x})) = T(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$$

となるので，AB は線型写像 $T \circ S$ の表現行列である。

演習問題 2.30　z 軸に関する θ 回転で与えられる写像を T とする。このとき T の表現行列を求めよ。

平面のベクトル $\boldsymbol{x}$ を原点の回りに θ 回転させて得られるベクトルは $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ であった。空間のベクトルにおいても z 軸の回りの回転なので，x, y 座標に関しては平面の回転と同じである。z 座標はこの回転で不変なので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \\ z \end{pmatrix}$ となるので

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

演習問題 *2.31　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転で与えられる写像を T とする。このとき T の表現行列を求めよ。

星印のついている問題なのでおおまかなやり方を示し，細部は各自にまかせる。

$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ を T の表現行列とする。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルとすると，$T(\boldsymbol{e}_i) = A\boldsymbol{e}_i\ (i = 1, 2, 3)$ である。

$\boldsymbol{r} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{r}$ と直交する 2 つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で長さが 1 であり，お互いに直交しているベクトルを 1 組決める。例えば $\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) このとき $T(\boldsymbol{p}) = \cos\theta \boldsymbol{p} + \sin\theta \boldsymbol{q}$, $T(\boldsymbol{q}) = -\sin\theta \boldsymbol{p} + \cos\theta \boldsymbol{q}$, $T(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ が成立することを示せ。

$B = (\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{r})$ とおくと

$$B^T B = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) \\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立している。

(2) $B^T B = E$ ならば $BB^T = E$ が成立することを示す。

$B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ とおく。$B^T B = E$ より $BB^T B = B$ が成立している。$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = 0$ とすると両辺に左から B^T をかけると

$$c_1 B^T \boldsymbol{b}_1 + c_2 B^T \boldsymbol{b}_2 + c_3 B^T \boldsymbol{b}_3 = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 = 0$$

となり $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立であり，$\boldsymbol{K}^3$ の基底になる。$\boldsymbol{e}_1$ に対しスカラー c_{11}, c_{21}, c_{31} が存在して $\boldsymbol{e}_1 = c_{11}\boldsymbol{p} + c_{21}\boldsymbol{q} + c_{31}\boldsymbol{r}$ が成立している。同様に $\boldsymbol{e}_2 = c_{12}\boldsymbol{p} + c_{22}\boldsymbol{q} + c_{32}\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{e}_3 = c_{13}\boldsymbol{p} + c_{23}\boldsymbol{q} + c_{33}\boldsymbol{r}$ となるスカラーが存在する。よって

$$E = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{r}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

が成立する。$BB^T B = B$ の両辺に右から $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ をかけると $B^T B = E$ が得られる。

(3) $(T(\boldsymbol{e}_1)\ T(\boldsymbol{e}_2)\ T(\boldsymbol{e}_3)) = (T(\boldsymbol{p})\ T(\boldsymbol{q})\ T(\boldsymbol{r}))B^T$ が成立することを示す。

$\boldsymbol{e}_1 = b_{11}\boldsymbol{p} + b_{12}\boldsymbol{q} + b_{13}\boldsymbol{r}$ が成立しているので $T(\boldsymbol{e}_1) = b_{11}T(\boldsymbol{p}) + b_{12}T(\boldsymbol{q}) + b_{13}T(\boldsymbol{r})$ が成立する。$\boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$ に関しても同様の式を得る。これを行列の形で書き下せば証明すべき式が得られる。

(4) (1) より

$$(T(\boldsymbol{p})\ T(\boldsymbol{q})\ T(\boldsymbol{r})) = (\cos\theta \boldsymbol{p} + \sin\theta \boldsymbol{q}\ \ -\sin\theta \boldsymbol{p} + \cos\theta \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{r}) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立する。
(5) 今までのことより

$$
\begin{aligned}
A &= (T(\boldsymbol{e}_1)\ T(\boldsymbol{e}_2)\ T(\boldsymbol{e}_3)) \\
&= (T(\boldsymbol{p})\ T(\boldsymbol{q})\ T(\boldsymbol{r}))B^T \\
&= (\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{r})\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B^T \\
&= B\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B^T
\end{aligned}
$$

となる。

演習問題 2.32 T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ に対し $T(\boldsymbol{x}_1), \dots, T(\boldsymbol{x}_n)$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ も 1 次独立であることを示せ。

$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。これを T で移すと

$$T(c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n) = c_1T(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{x}_n)$$

なので $c_1T(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0}$ が成立している。$T(\boldsymbol{x}_1), \dots, T(\boldsymbol{x}_n)$ の 1 次独立性より $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となり，$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ も 1 次独立である。

演習問題 2.33 T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) \leq U$, $\mathrm{Ker}(T) \leq V$ を示せ。

W が部分空間であることを示すには
(1) $\boldsymbol{0} \in W$
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W$ に対し $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W$
(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W$ と任意のスカラー α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$
を示せば良い。

$\boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{0})$ なので $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(T)$ である。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ のとき $T(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$，$T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ が成立している。$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となるので $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ となる。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が成立している。スカラー α に対し $T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ となる。

$\boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{0})$ なので $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}(T)$ である。$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ のときベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ が存在して $\boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2)$ が成立している。$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ であり，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in U$ なので $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in Im(T)$ となる。$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T)$ に対し $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ となるベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ が存在する。このとき $\alpha\boldsymbol{y} = \alpha T(\boldsymbol{x}) = T(\alpha\boldsymbol{x})$ であり，$\alpha\boldsymbol{x} \in U$ なので $\alpha\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T)$ となる。

演習問題 2.34 次の行列 A に対し T_A の核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ と像 $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

ただし行列は (m,n) 行列 A に対し $\mathrm{Ker}(T_A) = W(A) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $\mathrm{Im}(T_A) = \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}^m \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$が存在して$\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x}\}$ ($\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T) \Longleftrightarrow W(A, \boldsymbol{X}) \neq \emptyset$) なので連立 1 次方程式を基本変形で解けばよい。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $\widetilde{A} = (A\ \boldsymbol{0})$ とおき $\widetilde{A}$ に対して基本変形を行うと $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる。$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $\mathrm{Ker}(T_A) = W(A) = W(B)$ なので,

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる必要十分条件は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即ち $x = 0$ かつ $y = 0$ である。よって

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x = 0, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \boldsymbol{K} \right\}$$

となる。生成系で表示すると

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$ は解を持つ。ここで $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に

対し x, y, z を未知数，X, Y, Z は既知数と見ている。$\widetilde{A} = (A\ \boldsymbol{X})$ とおき，$\widetilde{A}$ を基本変形して行く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 1 & 2 & 0 & Y \\ 1 & 3 & 0 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y-X \\ 1 & 3 & 0 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y-X \\ 0 & 2 & 0 & Z-X \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \end{pmatrix}$$

この方程式は $X - 2Y + Z = 0$ のとき解を持つ。よって

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; X - 2Y + Z = 0 \right\}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 2Y - X \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので，生成系で表すと

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

行列 $\widetilde{A}$ の基本変形を実行することで A の基本変形も実行できるので，一度にやってもよい。ここでは別々に実行し，$\widetilde{A}$ は解の存在が分かる形に変形できれば，その時点で変形をやめた。次の問題は一度に行う。

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 3 & 2 & 8 & Y \\ 2 & 1 & 5 & Z \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 3 & 2 & 8 & Y \\ 2 & 1 & 5 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\times 1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 3 & 2 & 8 & Y \\ 0 & 3 & 3 & Z-2X \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 5 & 5 & Y-3X \\ 0 & 3 & 3 & Z-2X \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 1/3\times 3\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 5 & 5 & Y-3X \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{Z-2X}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 1/5\times 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{Y-3X}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{Z-2X}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{Y-3X}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5Z-X-3Y}{15} \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}+2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \dfrac{2X+3Y}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{Y-3X}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5Z-X-3Y}{15} \end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ とおくと $\mathrm{Ker}(T_A)=W(A)=W(B)$ なので，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(T_A)$ となる必要十分条件は $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即ち $x+2z=0$ かつ $y+z=0$ である。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

なので

$$\mathrm{Ker}(T_A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3\;\middle|\;x+2z=0,y+z=0\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

となる。

$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は $W(A,\boldsymbol{X})\neq\emptyset$ なので $-X-3Y+5Z=0$ である。

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5Z-3Y\\Y\\Z\end{pmatrix}=Y\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+Z\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

なので

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3\;\middle|\;-X-3Y+5Z=0\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

となる。

(3) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&X\\2&3&4&Y\\3&4&5&Z\\4&5&6&W\end{pmatrix}$ とおく

$$\begin{pmatrix}1&2&3&X\\2&3&4&Y\\3&4&5&Z\\4&5&6&W\end{pmatrix}\xrightarrow[4\text{ 行}\to4\text{ 行}-3\text{ 行}]{}\begin{pmatrix}1&2&3&X\\2&3&4&Y\\3&4&5&Z\\1&1&1&W-Z\end{pmatrix}\xrightarrow[3\text{ 行}\to3\text{ 行}-2\text{ 行}]{}\begin{pmatrix}1&2&3&X\\2&3&4&Y\\1&1&1&Z-Y\\1&1&1&W-Z\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to2\text{ 行}-1\text{ 行}]{}\begin{pmatrix}1&2&3&X\\1&1&1&Y-X\\1&1&1&Z-Y\\1&1&1&W-Z\end{pmatrix}\xrightarrow[4\text{ 行}\to4\text{ 行}-2\text{ 行}]{}\begin{pmatrix}1&2&3&X\\1&1&1&Y-X\\1&1&1&Z-Y\\0&0&0&W-Z-Y+X\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 2 & 3 & X \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2Y-3X \\ 0 & 1 & 2 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(T_A) = W(A) = W(B)$ なので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる必要十分条件は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即ち $x - z = 0$ かつ $y + 2z = 0$ である。よって

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x - z = 0, y + 2z = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は $W(A, \boldsymbol{X}) \neq \emptyset$ なので，$Z - 2Y + X = 0$ かつ $W - Z - Y + X = 0$ である。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 2Y - X \\ 3Y - 2X \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; Z - 2Y + X = 0, W - Z - Y + X = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

(4) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2Y-3X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(T_A) = W(A) = W(B)$ なので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる必要十分条件は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即ち $x - z - 2w = 0$ かつ $y + 2z + 3w = 0$ である。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は $W(A, \boldsymbol{X}) \neq \emptyset$ なので，$Z - 2Y + X = 0$ である。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 2Y - X \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^2 \;\middle|\; Z - 2Y + X = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

(5) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix}$ とおく。基本変形を実行しなくても準標準形になっている。

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; w = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; Y = 0, Z = 0, W = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 1 & 0 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 1 & 1 & 0 & 0 & W \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 1 & 0 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 1 & 1 & 0 & 0 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\leftrightarrow 1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 1 & 1 & 0 & 0 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 0 & 1 & 0 & -1 & W-Y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & -2 & W-Y-X \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to -1/2\times 4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{X+Y-W}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{Y-X+W}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{X+Y-W}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{Y-X+W}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{X-Y+W}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{X+Y-W}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{Y-X+W}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{X-Y+W}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{2Z-X-Y+W}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{X+Y-W}{2} \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\mathrm{Ker}(T_A) = W(A) = W(B)$ なので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる必要十分条件は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即ち $x = 0$ かつ $y = 0$ かつ $z = 0$ かつ $w = 0$ である。よって

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, x = 0, y = 0, z = 0, w = 0 \right\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

である。

任意の $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4$ に対し $x = \dfrac{Y - X + W}{2}, y = \dfrac{X - Y + W}{2}, z = \dfrac{2Z - X - Y + W}{2},$

$w = \dfrac{X + Y - W}{2}$ とおき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} = T_A(\boldsymbol{x})$ となるので $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T_A)$ となる。よって

$$\mathrm{Im}(T_A) = \boldsymbol{K}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

(7) このとき任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4$ に対し $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \boldsymbol{K}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Im}(T_A) = \{\boldsymbol{0}\}$$

となる。

(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 4 & 5 & 6 & 7 & W \\ 5 & 6 & 7 & 8 & U \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 4 & 5 & 6 & 7 & W \\ 5 & 6 & 7 & 8 & U \end{pmatrix} \xrightarrow[5\text{ 行}\to 5\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 4 & 5 & 6 & 7 & W \\ 1 & 1 & 1 & 1 & U-W \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-3\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & U-W \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & U-W \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & U-W \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[5\text{ 行}\to 5\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U-2W+Z \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-3\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-2Z+Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U-2W+Z \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-2Z+Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U-2W+Z \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-2Z+Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U-2W+Z \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-2Z+Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U-2W+Z \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2Y-3X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-2Z+Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U-2W+Z \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(T_A) = W(A) = W(B)$ なので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$
となる必要十分条件は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即ち $x - z - 2w = 0$ かつ $y + 2z + 3w = 0$ である。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$

のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x-z-2w=0, y+2z+3w=0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \\ U \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^5 \in \mathrm{Im}(T_A) \text{ となる必要十分条件は } W(A, \boldsymbol{X}) \neq \emptyset \text{ なので，} Z-2Y+X=0$$

かつ $W-2Z+Y=0$ かつ $U-2W+Z=0$ である。$\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 2Y-X \\ 3Y-2X \\ 4Y-3X \end{pmatrix} = Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \\ U \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^5 \;\middle|\; Z-2Y+X=0, W-2Z+Y=0, U-2W+Z=0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

演習問題 *2.35　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。このとき

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

が成立する事を示せ。(ヒント: $\mathrm{Ker}(T)$ の基底と $\mathrm{Im}(T)$ の基底から U の基底を構成する。)

$\mathrm{Ker}(T)$ の基底を $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p$，$\mathrm{Im}(T)$ の基底を $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_q$ とする。このとき $\dim \mathrm{Ker}(T) = p$, $\dim \mathrm{Im}(T) = q$ である。各 $\boldsymbol{y}_i$ $(i = 1, \ldots, q)$ に対し $T(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{y}_i$ となるベクトル $\boldsymbol{x}_i \in U$ が存在するので，そのようなベクトルを 1 組選んでおく。

このとき $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q$ が U の基底であることを示せば証明が終る。$c_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{z}_p + d_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + d_q\boldsymbol{x}_q = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。このベクトルに T をほどこすと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= T(\boldsymbol{0}) = T(c_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{z}_p + d_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + d_q\boldsymbol{x}_q) \\
&= c_1T(\boldsymbol{z}_1) + \cdots + c_pT(\boldsymbol{z}_p) + d_1T(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + d_qT(\boldsymbol{x}_q) \\
&= c_1\boldsymbol{0} + \cdots + c_q\boldsymbol{0} + d_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + d_q\boldsymbol{y}_q \\
&= d_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + d_q\boldsymbol{y}_q
\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_q$ の 1 次独立性より $d_1 = \cdots = d_q = 0$ が分かる。元の式に代入すると

$$c_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{z}_p = \boldsymbol{0}$$

となるが，$\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p$ の 1 次独立性より $c_1 = \cdots = c_p = 0$ となる。よって $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q$ は 1 次独立である。

$\boldsymbol{x} \in U$ を任意のベクトルとする。$\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_q$ は $\mathrm{Im}(T)$ に基底なので $T(\boldsymbol{x})$ に対しスカラー $b_1, \ldots, b_q$ が存在して

$$T(\boldsymbol{x}) = b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_q\boldsymbol{y}_q$$

となる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - (b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + b_q\boldsymbol{x}_q)$ とおくと

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{v}) &= T(\boldsymbol{x}) - (b_1T(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + b_qT(\boldsymbol{x}_q)) \\
&= b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_q\boldsymbol{y}_q - (b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_q\boldsymbol{y}_q) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

なので $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ となる。$\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の基底なのでスカラー $a_1, \ldots, a_p$ が存在して $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + a_p\boldsymbol{z}_p$ と書ける。よって

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + a_p\boldsymbol{z}_p + b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + b_q\boldsymbol{x}_q$$

と表されるので $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q$ が U を生成することが示される。以上により $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q$ が U の基底であることが分かり，

$$\dim U = p + q = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

が成立する。

演習問題 2.36 (5) を除き上で述べたことを証明せよ。

(1) $a \neq 0$ とする。$T(x_1) = T(x_2)$ のとき $T(x) = ax$ なので $ax_1 = ax_2$ が成立する。$a \neq 0$ なので両辺を a で割ると $x_1 = x_2$ となる。よって T は一対一である。

また任意の $y \in V = \boldsymbol{R}$ に対し $x = \dfrac{y}{a}$ とおくと $T(x) = a\dfrac{y}{a} = y$ となるので T は上への写像である。よって T は同型写像である。

$a = 0$ のとき $T(0) = 0 = T(1)$ なので一対一写像ではない。よって T は同型写像でない。

(2) 形式的には (1) と全く同様にできるので省略。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in U$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}')$ が成立しているとする。$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, T(\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ なので $x = x', y = y'$ が成立する。$\boldsymbol{x} \in U$ なので $x + y + z = 0$ よって

$z=-x-y$ となる。$\boldsymbol{x}'\in U$ なので $x'+y'+z'=0$ よって $z'=-x'-y'$ となる。$z=-x-y=-x'-y'=z'$ となり T は一対一である。

任意のベクトル $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $z=-x-y$ とおき $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}\in U$ であり，$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる。T は上への写像なので，前とあわせて同型写像である。

(4) T はベクトルの距離を変えないので任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ に対し $|T(\boldsymbol{x}_1)-T(\boldsymbol{x}_2)|=|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$ となる。$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$ のとき $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|\neq 0$ なので $|T(\boldsymbol{x}_1)-T(\boldsymbol{x}_2)|\neq 0$ となり $T(\boldsymbol{x}_1)\neq T(\boldsymbol{x}_2)$ となる。よって T は一対一写像である。

$\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し z 軸に関し $-\theta$ 回転させて得られるベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる。よって T は上への写像であり，同型写像になる。

演習問題 2.37　線型写像 $T:U\to V$ が一対一である必要十分条件は $\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{0}\}$ であることを示せ。

$T(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{0}\in\mathrm{Ker}(T)$ は常に成立している。T が一対一のとき $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}(T)$ とすると $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となっている。このとき $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}=T(\boldsymbol{0})$ であり，T が一対一ということから $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる。よって $\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{0}\}$ である。

逆に $\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{0}\}$ とする。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in U$ に対し $T(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{x}')$ が成立しているとする。

$$T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=T(\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}')=T(\boldsymbol{x})+T((-1)\boldsymbol{x}')=T(\boldsymbol{x})+(-1)T(\boldsymbol{x}')=T(\boldsymbol{x})-T(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{0}$$

なので $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\in\mathrm{Ker}(T)$ となるが，$\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{0}\}$ なので $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ となる。よって T は一対一である。