線形解析 II 要綱 #1

2005–10–3　　河野

今回の講義から線形解析 II に入る。要綱の number 及びページ数は 1 から始めるが，章の数は前期からの継続とする。

3　連立 1 次方程式と階数

「連立 1 次方程式を解く」事に関しては前期に 1 章で扱った。ここでは連立 1 次方程式の一般理論を階数と関係させて扱う。この章の keyword は 3 つ，**連立１次方程式，基本変形，階数**である。階数は定義が 4 種類あり，1 つを定義に採用すれば残り 3 つは性質になる。階数が 4 つの側面を持っていることをしっかり押さえることが重要である。

3.1　連立 1 次方程式

最初に問題を定式化しよう。連立 1 次方程式を表現する形は色々あった。

$$(E)\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}\right.$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})\in\boldsymbol{K}^m$, $\boldsymbol{b}=(b_i)\in\boldsymbol{K}^m$ とおくと

$(E_V)\quad x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$

$A=(a_{ij})\in M(m,n;\boldsymbol{K})$, $\boldsymbol{x}=(x_j)\in\boldsymbol{K}^n$ とおくと

$(E_M)\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

この 3 つは同じ内容を表している。(E) は通常の表記，(E_V) はベクトル方程式として表記したもの，(E_M) は行列表示である。この時問題は以下の様に定式化される。

(1) (E) はどの様な場合に解を持つのか。

(2) 解が存在するとき，解はどれくらい有るのか。

(3) その時すべての解をパラメーター等を用いて表せ。

この連立 1 次方程式の解の集合を $W(A,\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ と書いたが，上の問題は

(1) $W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ となるのはどの様な場合か。

(2) $W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ のとき $W(A,\boldsymbol{b})$ の「大きさ」はどれぐらいか。

(3) $W(A,\boldsymbol{b})$ の元すべてをパラメータを用いて表示せよ。

という問題になる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

一般に議論する前に，前期でやった事を具体例にしたがって復習しておこう。ここで b は与えられた定数とする。次の連立 1 次方程式を考える。

$$(E_1)\qquad \begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 2x+5y+3z=b+3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+3 \end{pmatrix}$ とおく。係数拡大行列は $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix}$ であり，解集合は $W(A,\boldsymbol{b})$ である。この係数拡大行列 $\widetilde{A}$ を基本変形で「もっと見やすい形」に変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

行基本変形しか行っていないので，もとの連立 1 次方程式と変形後の連立 1 次方程式の解集合は同じである。即ち $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ とおくとき $W(A,\boldsymbol{b})=W(B,\boldsymbol{c})$ が成立している。

解の存在に関しては $W(B,\boldsymbol{x})$ を見ると，$b\neq 0$ のとき解は存在しない，即ち $W(B,\boldsymbol{c})=\emptyset$ であることが分かる。$b=0$ の時解が存在する，即ち $W(B,\boldsymbol{c})\neq\emptyset$ が分かる。$b=0$ のとき，係数拡大行列 $\widetilde{B}=(B\ \boldsymbol{c})$ が表す連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x & + & 0y & - & z & = & -1 \\ 0x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{cases}$$

となる。よって $W(B,\boldsymbol{c})$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示される。

$W(A,\boldsymbol{b})=W(B,\boldsymbol{c})$ なので，上の事実は $W(A,\boldsymbol{b})$ に対して成立している。

ここでパラメータ表示に現れるベクトルについて 1 つ注意をしておこう。パラメータ表示にはベクトル $\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が出てきている。係数のかかっていないベクトル $\boldsymbol{x}_0$ は

$\boldsymbol{x}_0 \in W(A,\boldsymbol{b})$ である。係数のかかっているベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は $W(A,\boldsymbol{b})$ の元ではないが，$W(A,\boldsymbol{0})$(これを $W(A)$ と略記した) の元になっている。即ち，$W(A,\boldsymbol{b})$ の一般の元は $W(A,\boldsymbol{b})$ の 1 つの元 (今の場合 $\boldsymbol{x}_0$) と $W(A)$ の元の和の形に書かれている。また $W(A)$ はベクトル空間で，$W(A)=\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となっている。

上で述べたことは一般の場合も成立する。連立 1 次方程式で，特に $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合を考える。

$$
(H)\left\{\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & 0\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & 0\\
\vdots & & \vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}\right.
$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})\in \boldsymbol{K}^m$ とおくと

$(H_V)\quad x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$

$A=(a_{ij})\in M(m,n;\boldsymbol{K})$, $\boldsymbol{x}=(x_j)\in \boldsymbol{K}^n$ とおくと

$(H_M)\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

命題 3.1 (E) に解が存在する時，(E) の解と (H) の解の間には 1 対 1 対応がある。

もう少し具体的に述べると，$W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ のとき，$W(A,\boldsymbol{b})$ のベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を 1 つ固定する。そのとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in W(A,\boldsymbol{b})$ に対し，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ は $W(A)$ の元である。逆に任意のベクトル $\boldsymbol{y}\in W(A)$ に対し $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}$ は $W(A,\boldsymbol{b})$ の元である。

証明 $\boldsymbol{x}\in W(A,\boldsymbol{b})$ とすると $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ である。また $\boldsymbol{x}_0\in W(A,\boldsymbol{b})$ から $A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}$ が成立している。よって $A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=A\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\in W(A)$ となっている。

$\boldsymbol{y}\in W(A)$ とすると $A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ である。よって $A(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y})=A(\boldsymbol{x}_0)+A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$ となるので $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}\in W(A,\boldsymbol{b})$ となる。

$W(A,\boldsymbol{b})$ から $W(A)$ への写像 F を $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ で定義する。これは確かに $W(A)$ への写像になっている。この写像が上への一対一写像であることを示せば命題が示される。

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in W(A,\boldsymbol{b})$ に対し $F(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x}')$ とすると，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=F(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_0$ より，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ となる。よって F は 1 対 1 写像である。$W(A)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0$, $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}$ となるので F は上への写像である。 ∎

命題 3.1 により (E) に解が存在する場合，その解と (H) の解は 1 対 1 対応する。問題 (2) の『どれぐらい』というときのはかる基準として $W(A)=\{\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n \mid\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}$ の次元 $\dim W(A)$ をとる事にする。この数はパラメータ表示に関していうと，パラメータの個数に対応する。

演習問題 3.1 次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。またこの問題での $W(A)$ の基底を求めよ (この問題は基底を除き線形解析 I 演習問題 1.4 と同じ問題である)。

$$
(1)\left\{\begin{array}{rcl}
x+y+z+w & = & 1\\
x+y+z+w & = & a
\end{array}\right.
$$

$$
(2) \begin{cases} x+y+z+u+v &= 1 \\ x+2y+3z+4v &= 0 \\ 2x+3y+4z+5v &= a \end{cases}
$$

$$
(3) \begin{cases} 1x + 0y + 0z + 2v + 0w = 1 \\ 0x + 1y + 0z + 0v + 3w = 1 \\ 1x + 0y + 0z + 3v + 1w = 2 \\ 1x + 1y + 0z + 3v + 4w = a+3 \\ 1x + 2y + 0z + 7v + 0w = b+4 \end{cases}
$$

演習問題 3.2 $(m.n)$ 行列 A に対し $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。次の A に対しそれぞれ $\mathrm{Ker}(T)$ 及び $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ (この問題は線形解析 I 演習問題 2.34 の一部)。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$