線形解析 II 要綱 #2

2005–10–4 河野

3.2 基本変形

この節では数理解析 I で取り上げた「基本変形」と呼ばれる変形をもう一度考える。

基本変形とは次の様なものであった。(1) 行列のある行に他の行のスカラー倍を加える操作，(2) ある行をスカラー倍する操作 (ただし 0 倍を除く)，(3) ある行と別の行を交換する操作をまとめて**行基本変形**と言う。列に対しても同じ様な変形が考えられる。(1) 行列のある列に他の列のスカラー倍を加える操作，(2) ある列をスカラー倍する操作 (ただし 0 倍を除く)，(3) ある列と別の列を交換する操作をまとめて**列基本変形**と言う。両方合わせて**基本変形**と呼ぶ。

基本変形では次の命題が基本的である。

命題 3.2 任意の行列 A に対し適当な基本変形を繰返すと，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形 (**標準形**ともいう) にできる (O の部分がない場合もある)。

行列が $\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できれば $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できる。$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形まで十分の場合もある。この形をここでは**準標準形**と呼んでおこう[(1)]。準標準型に変形するためには，行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で十分であることを注意しておく。

演習問題 3.3 命題 3.2 を証明せよ。また準標準型へは行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で変形できることを示せ (線形解析 I 命題 1.1 を参考に)。

演習問題 3.4 次の行列に基本変形を行なって標準形または準標準形にせよ (線形解析 I 演習問題 1.3 と同じ問題)。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

ここで連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解集合 $W(A, \boldsymbol{b})$ がその係数拡大行列 $(A\,\boldsymbol{b})$ の基本変形でどの様に変化するか (変化しないか) をもう一度確認しておこう。一般でも同様であるが簡単のため $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ としよう。係数拡大行列は $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$ だが，これに対応す

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1)一般的な用語ではない。また前期の用語とも若干異なっている。

る連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} ax & + & by & = & p \\ cx & + & dy & = & q \end{cases}$$

である。$\widetilde{A}$ に基本変形を行って得られる行列を $\widetilde{A}' = (A'\ \boldsymbol{b}')$ と書く。

基本変形として行基本変形の 1 番目を考える。例えば，2 行目の 2 倍を 1 行目に加える変形を行うと，得られる行列は $\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d & p+2q \\ c & d & q \end{pmatrix}$ であるが，これに対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} (a+2c)x & + & (b+2d)y & = & p \\ cx & + & dy & = & q \end{cases}$$

となる。この変形は連立 1 次方程式では，2 式の 2 倍を 1 式に加えたものを 1 式と置き換える,「加減法」を行っている事になる。したがって $A' = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} p+2q \\ q \end{pmatrix}$ であり，$W(A, \boldsymbol{b}) = W(A', \boldsymbol{b}')$，即ち行基本変形の第 1 番目を行っても，解集合は変化しない。

同様に 2 番目の行基本変形は式の両辺を何倍かする事に対応し，3 番目の変形は 1 番目の式と 2 番目の式の位置を入れ換える事に対応している。この場合も $W(A, \boldsymbol{b}) = W(A', \boldsymbol{b}')$ であり，解集合は変化しない。

次に列基本変形を考える。ただし，方程式と対応させるためには**最後の列を変形してはいけないし，最後の列を他の列に加える**変形を行ってもいけない。

列基本変形の 1 番目を考える。例えば，2 列の 2 倍を 1 列に加える変形を考える。$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} a+2b & b & p \\ c+2d & d & q \end{pmatrix}$ に対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} (a+2b)x & + & by & = & p \\ (c+2d)x & + & dy & = & q \end{cases}$$

となるが，この式系を

$$\begin{cases} ax & + & b(y+2x) & = & p \\ cx & + & d(y+2x) & = & q \end{cases}$$

と変形すれば，元の連立 1 次方程式で変数を $x \to x, y \to y+2x$ と変形したものになっている。即ち $A' = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$ であり，もとの連立 1 次方程式の解集合 $W(A, \boldsymbol{b})$ と変形後の連立 1 次方程式の解集合 $W(A', \boldsymbol{b})$ を比較すると，$W(A, \boldsymbol{b}) = W(A', \boldsymbol{b})$ は成立しないが，$x \to x,\ y \to y+2x$ という対応で，$W(A, \boldsymbol{b})$ と $W(A', \boldsymbol{b})$ の元は一対一対応している。

列基本変形の 2 番目を考える。例えば，1 列を 2 倍する変形を行うと，$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} 2a & b & p \\ 2c & d & q \end{pmatrix}$ となり，これに対応する方程式は

$$\begin{cases} 2ax & + & by & = & p \\ 2cx & + & dy & = & q \end{cases}$$

となるが，これは元の連立 1 次方程式で $x \to 2x, y \to y$ としたものになっている。即ち $A' = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}$ であり，元の連立 1 次方程式の解集合は $W(A, \boldsymbol{b})$ で変形後は $W(A', \boldsymbol{b})$ であり，$W(A, \boldsymbol{b}) =$

$W(A', \boldsymbol{b})$ は成立しないが，$x \to 2x,\ y \to y$ という対応で，$W(A, \boldsymbol{b})$ と $W(A', \boldsymbol{b})$ の元は一対一対応している。

列基本変形の 3 番目，1 列と 2 列を入れ換える変形を考える。$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} b & a & p \\ d & c & q \end{pmatrix}$ となり，これに対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} bx & + & ay & = & p \\ dx & + & cy & = & q \end{cases}$$

となるが，元の連立１次方程式で $x \to y, y \to x$ としたものになっている。即ち，$A' = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ であり，元の連立 1 次方程式の解集合 $W(A, \boldsymbol{b})$ と変形後の連立１次方程式の解集合 $W(A', \boldsymbol{b})$ を比較すると，$W(A, \boldsymbol{b}) = W(A', \boldsymbol{b})$ は成立しないが，$x \to y,\ y \to x$ という対応で，$W(A, \boldsymbol{b})$ と $W(A', \boldsymbol{b})$ の元は一対一対応している。

上で述べたことは一般にも成立する。

命題 3.3 $A \in M(m, n; \boldsymbol{K}), \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ とする。$\widetilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ を基本変形した行列を $\widetilde{A}' = (A'\ \boldsymbol{b}')$ とする。このとき基本変形が行基本変形なら $W(A, \boldsymbol{b}) = W(A', \boldsymbol{b}')$ が成立する。また基本変形が列基本変形であり，最後の列 (即ち $\boldsymbol{b}$) を変形しない変形なら，$W(A, \boldsymbol{b})$ と $W(A', \boldsymbol{b})$ の間に一対一対応が存在する。

演習問題 3.5 命題 3.3 を証明せよ。また列基本変形の場合に変数間にどの様な対応があるかも考えよ。