線型解析 II 要綱 #3　　2005–10–11　　河野

3.3　階数の幾つかの定義とその同値性

定義 3.4 4 種類の**階数** (*rank*) を定義しよう。$A = (a_{ij})$ を (m,n) 行列とする。行列の j 列を縦ベクトルと見たものを $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ と書き，行列 A は縦ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を横に並べたものと考え，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ と書き表す事ができる。同様に行列の i 行を横ベクトルと見たものを $\boldsymbol{a}^*{}_i = (a_{i1}\, a_{i2}\, \cdots\, a_{in})$ と書き，行列 A は横ベクトル $\boldsymbol{a}^*{}_i$ を縦に並べたものと考え $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^*_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^*_m \end{pmatrix}$ と書き表す事ができる。

(1) 行列 A に基本変形を行ない標準型 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ になったとき，対角成分に並ぶ 1 の個数 r を $\mathrm{rank}_1(A)$ と表す。

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_2(A)$ と表す。

(3) $\{\boldsymbol{a}^*{}_1, \cdots, \boldsymbol{a}^*{}_m\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_3(A)$ と表す。

(4) $\mathrm{Im}(T_A) = \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \,\}$[(1)]の次元 $\dim \mathrm{Im}(T_A)$ を $\mathrm{rank}_4(A)$ と表す。

定理 3.5 定義 (1)，(2)，(3)，(4) は同じもの。
つまり，$\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ である。この定理が証明された後はこれらを同じ $\mathrm{rank}(A)$ で表し，行列 A の**階数** (*rank*) という。

$A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に対し定理 3.5 が正しいのは明らかであろう。だが，一般の場合に定理 3.5 を証明するためには基本変形の性質を調べる事が必要になる。しかし，$\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ はその知識がなくても証明できるので，それを最初に補題として証明しておく。

補題 3.6 $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ が成立する。

証明　$A, \boldsymbol{a}_j$ を定義 3.4 と同じものとし，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとする。$\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j = T_A(\boldsymbol{e}_j)$ より，$\boldsymbol{a}_j \in \mathrm{Im}(T_A)$ となる。ここで，$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とする。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。$k > r$ となる k に対し，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_k\}$ は 1 次独立ではない。よって $\boldsymbol{a}_k = \beta_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{kr}\boldsymbol{a}_r$ と表わすことができる。任意の $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(T_A)$ に対し，$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r$ と書ける事を示せば,

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。
[(1)]前期で定義したが，表現行列 A をもつ線形写像 T_A の像である。

$\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底となり，$\mathrm{rank}_4(A) = \dim \mathrm{Im}(T_A) = r = \mathrm{rank}_2(A)$ がいえる。$\boldsymbol{w}$ に対し $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ が存在して，$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{x}$ となる。$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けるので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= A\boldsymbol{x} = A(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 A\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n A\boldsymbol{e}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + x_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + +x_{r+1}(\beta_{r+11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{r+1r}\boldsymbol{a}_r) + \cdots + x_n(\beta_{n1}\boldsymbol{a}_1 \cdots + \beta_{nr}\boldsymbol{a}_r) \\
&= (x_1 + x_{r+1}\beta_{r+11} + \cdots + x_n\beta_{n1})\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_r + x_{r+1}\beta_{r+1r} + \cdots + x_n\beta_{nr})\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}$$

となり，よって補題は示された。 ∎

定理 3.5 を示すために次の補題を示す。この補題が示されれば，定理が成立することは明らかであろう。

補題 3.7 A に行基本変形または列基本変形を行った行列を A' とすると

$$\mathrm{rank}_2(A') = \mathrm{rank}_2(A)$$
$$\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$$

が成立する。

略証 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n)$，$A' = (\boldsymbol{a}'_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}'_n)$ とおく。同様にできるので，$\mathrm{rank}_2(A') = \mathrm{rank}_2(A)$ のみ証明する。$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とすると，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。

最初に行基本変形の場合を示す。$A_r = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_r)$，$A'_r = (\boldsymbol{a}'_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}'_r)$ とおくと A_r に行基本変形を行った結果が A'_r となる。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立であることと $W(A) = \{\boldsymbol{0}\}$ であることは同値であることを注意しておく。今 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は１次独立なので $W(A) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立している。行基本変形を行っても連立１次方程式の解集合は変化しないので，$W(A'_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立している。よって $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_r$ は１次独立である。以上により $\mathrm{rank}_2(A) \leqq \mathrm{rank}_2(A')$ が成立する。行基本変形の逆操作は行基本変形であることに注意して，A と A' の役割を入れ換えれると $\mathrm{rank}_2(A') \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ が成立することが分かる。よって $\mathrm{rank}_2(A') = \mathrm{rank}_2(A)$ が成立する。

次に列基本変形について示す。最初に列基本変形の 3 番目の変形の場合に示す。3 番目の変形は列の入れ換えなのでベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ は順序が一部異なるだけで集合としては等しい。よって１次独立なベクトルの最大個数は等しい。

2 番目の変形のとき，i 列が $\lambda\ (\neq 0)$ 倍されたとする。このとき $W(A_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ なので $W(A'_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ となり，１次独立性は変わらない。

1 番目の変形のとき，変形を j 列の α 倍が i 列に加えるものとする。即ち $\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i + \alpha\boldsymbol{a}_j$ であり，$k \neq i$ のとき $\boldsymbol{a}'_k = \boldsymbol{a}_k$ となっている。$i > r$ のとき最初の r 個のベクトルは変化しないので $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ も 1 次独立である。よって $i \leqq r$ とする。$j \leqq r$ のときは $W(A_r)$ と $W(A'_r)$ は一対一に対応するので，$W(A_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ より $W(A'_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ となり，$\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ は 1 次独立になる。よって $j > r$ とする。ベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_j$$

が 1 次独立な場合とそうでない場合に分ける。1 次独立な場合は $\mathrm{rank}_2(A') \geqq r$ となるので $\mathrm{rank}_2(A) \leqq \mathrm{rank}_2(A')$ となる。１次独立でない場合は $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}'_r$ が１次独立であることを示す。$\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の線型結合で書けるので，$\boldsymbol{a}_j = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \boldsymbol{a}_k$ と表しておく。ただし $\beta_i = 0$

である。

$$c_1\boldsymbol{a}'_1 + \cdots + c_i\boldsymbol{a}'_i + \cdots + c_r\boldsymbol{a}'_r = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。このとき式を変形すると

$$(c_1 + c_i\beta_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (c_{i-1} + c_i\beta_{i-1})\boldsymbol{a}_{i-1} + c_i\boldsymbol{a}_i + (c_{i+1} + c_i\beta_{i+1})\boldsymbol{a}_{i+1} + (c_r + c_i\beta_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次独立性より $c_i = 0$ となり，$k \neq i$ に対しても $c_k = 0$ が成立する。よって $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_r$ は 1 次独立である。以上により $\mathrm{rank}_2(A) \leqq \mathrm{rank}_2(A')$ が成立する。A と A' の役割を入れ替えることにより $\mathrm{rank}_2(A') \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ が得られるので証明は終わる。 ∎

演習問題 *3.6 補題 3.7 の証明を参考にして $\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$ を示せ。
演習問題 3.7 補題 3.7 から定理 3.5 を示せ。

正方行列に関して階数と正則性の間には次の関係がある。

命題 3.8 A が n 次行列のとき，A が正則 (逆行列を持つ) である必要十分条件は $\mathrm{rank}(A) = n$ である。

証明 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n), \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする。A が正則のとき $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立である事を示せば，$\mathrm{rank}(A) = n$ が分かる。$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。この式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と書き直せるので，A^{-1} を両辺にかけると $A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が分かる。

$\mathrm{rank}(A) = n$ とすると $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である。このとき $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ はベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ の基底である。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対しスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{x}_n$ と書ける。特に $\boldsymbol{b}$ として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 達をとってくる。即ち各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対しスカラー $b_{i1}, \ldots, b_{in}$ が存在して $\boldsymbol{e}_i = b_{i1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{in}\boldsymbol{a}_n$ が成立する。$B = (b_{ij})$ とおいて行列で書き直すと $E = BA$ を意味している。よって B は逆行列である。 ∎

演習問題 3.8 次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$