線型解析 II 要綱 #4	2005–10–17	河野

3.4 連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式について 3.1 節で考えた問題には階数を用いて，次の様に述べる答える事ができる。

定理 3.9 方程式 (E) が解を持つための必要十 分条件は

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\,\boldsymbol{b})$$

である。解空間 $W(A)$ の次元は $n - \operatorname{rank} A$ である。また，(E) が解を持つとき解は $n - \operatorname{rank}(A)$ 個のパラメータを用いて表される。

定理を証明するため，次の命題を使う。

命題 3.10 行列 $(A|\boldsymbol{b})$ は行基本変形と列の入替え（ただし，$\boldsymbol{b}$ の列は入替えない）で行列

$$(A'\,\boldsymbol{b}') = \left(\begin{array}{cc|c} E_r & C & \boldsymbol{b}_1' \\ O & O & \boldsymbol{b}_2' \end{array}\right)$$

に変形できる。ただし $r = \operatorname{rank}(A)$ である。この時連立 1 次方程式

$$(E') \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

が解をもつ必要十分条件は $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{0}$ であり，$W(A')$ の次元は $n - \operatorname{rank} A$ である。また $\boldsymbol{x} \in W(A', \boldsymbol{b}')$ は $n - \operatorname{rank} A$ 個のパラメータ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ を用いて表すことができる。

証明 前半 (変形可能性) は線形解析 I 命題 1.1 で示してあるので，後半のみ示す。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W(A', \boldsymbol{b}')$ とすると，$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ が成立しているが，この式は $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix} E_r & C \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1' \\ \boldsymbol{b}_2' \end{pmatrix}$ と書き直すことができる。これは

$$E_r\boldsymbol{x}_1 + C\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_1', \qquad O\boldsymbol{x}_1 + O\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2' \text{ [(1)]}$$

を意味する。$W(A', \boldsymbol{b}')$ が空でなければ $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{0}$ となる。逆に $\boldsymbol{b}_2' = 0$ のとき $\boldsymbol{x}_2$ を任意に与えるとき，$\boldsymbol{x}_1 = -C\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{b}_1'$ とおくと $\boldsymbol{x}$ は (E') の解になる。よって (E') が解を持つ必要十分条件は $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{0}$ である。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ となっているとき $M\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{x}_2 \\ C\boldsymbol{x}_1 + D\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ が成立する。これは後で演習問題とする。

$\boldsymbol{x} \in W(A')$ とすると，$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立しているが，前と同様に $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて書き直すと $\begin{pmatrix} E_r & C \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立するので $E_r\boldsymbol{x}_1 + C\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ と書き直すことができる。

$$\boldsymbol{v}_{r+1} = \begin{pmatrix} -c_{11} \\ \vdots \\ -c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} -c_{r1} \\ \vdots \\ -c_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = x_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

の様に表すことができる。ただし，ここで $C = (c_{ij})$ とおいた。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r}$ は 1 次独立なので $W(A')$ は $n-r$ 次元である。

$\boldsymbol{x} \in W(A', \boldsymbol{b}')$ とすると

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' + x_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と $n-r$ 個のパラメータ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ を用いて表示できる。 ∎

演習問題 *3.8　A を (s_1, t_1) 行列，B を (s_1, t_2) 行列，C を (s_2, t_1) 行列，D を (s_2, t_2) 行列とする。$\boldsymbol{x}_1$ を t_1 項数ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ を t_2 項数ベクトルとする。$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ となっているとき $M\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{x}_2 \\ C\boldsymbol{x}_1 + D\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ が成立する。

定理 3.9 の証明：　A' は A に，$(A'\ \boldsymbol{b}')$ は $(A\ \boldsymbol{b})$ に，基本形変形を何回か実行して得られるので $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A') = r$，$\mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A'\ \boldsymbol{b}')$ が成立している。$\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{0}$ のとき $(A'\ \boldsymbol{b}')$ は準標準型になっているので $\mathrm{rank}(A'\ \boldsymbol{b}') = r$ である。即ち $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b})$ が成立している。$\boldsymbol{b}'_2 \neq \boldsymbol{0}$ のとき，基本変形を実行すると $\mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b}') = r+1$ であることが分かる。よって $\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{0}$ である必要十分条件は $\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b})$ であることが分かるので，命題 3.10 より定理の最初の部分が成立する。

$W(A)$ と $W(A')$ および $W(A, \boldsymbol{b})$ と $W(A', \boldsymbol{b}')$ の間には一対一対応があるので，そのことから後半部分が従う。 ∎

系 3.11 $m = n$ のとき，A が正則ならば連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯 1 つの解を持つ。

演習問題 3.9　次の連立方程式が解を持つかどうか，定理 3.9 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ (この問題は演習問題 3.1 と同じ問題)。

(1) $\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x+y+z+w &= a \end{cases}$

$$(2)\begin{cases} x+y+z+u+v &= 1 \\ x+2y+3z+4v &= 0 \\ 2x+3y+4z+5v &= a \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} 2x+y+2z+u+2v+w &= 1 \\ x+2y+z+2u+v+2w &= 0 \\ x-y+z-u+v-w &= a \\ x+y+z+u+v+w &= b \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} 1x+1y+1z+1u+1v+2w=1 \\ 1x+2y+2z+2u+3v+3w=2 \\ 1x+1y+2z+3u+2v+3w=2 \\ 2x+2y+3z+4u+3v+5w=a+3 \\ 3x+2y+3z+4u+3v+5w=b+3 \end{cases}$$

演習問題 3.10　次の行列 A および $\widetilde{A}=(A\,\boldsymbol{b})$ の階数を求めよ。ただし

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

とする。また $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつかどうか調べよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。

3.5　基本変形を用いた逆行列の計算

この節では基本変形を用いて逆行列を計算する方法を扱う。次の命題が出発点となる。

命題 3.12 n 次行列 A が正則ならば行基本変形だけで E_n に変形できる。

この命題を証明するため基本変形と，基本行列と呼ばれる或る種の行列の積の関係について述べる。

定義 3.13 次ページにあるように n 次行列

$$P_n(k,\ell),\qquad Q_n(k;\lambda),\qquad R_n(k,\ell;\alpha)$$

を**基本行列**と呼ぶ。成分で表すと，$P_n(k,\ell)=(p_{ij})$, $Q_n(k;\lambda)=(q_{ij})$, $R_n(k,\ell;\alpha)=(r_{ij})$ と置いた時 ($\lambda\neq 0$ とする)

$$\begin{array}{lll} p_{k\ell}=p_{\ell k}=1, & p_{ii}=1(i\neq k,\ell), & p_{ij}=0\ (\text{その他の場合}) \\ q_{kk}=\lambda, & q_{ii}=1(i\neq k), & q_{ij}=0\ (\text{その他の場合}) \\ r_{k\ell}=\alpha, & r_{ii}=1, & r_{ij}=0\ (\text{その他の場合}) \end{array}$$

である。

$$P_n(k,\ell) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 &&& \\ &&& 0 & 1 & & 0 & 0 &&& \\ &&& \vdots & & \ddots & & \vdots &&& \\ &&& 0 & & & 1 & 0 &&& \\ &&& 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \text{対角成分に 0 がある行は } k \text{ 行と } \ell \text{ 行}$$

$$Q_n(k;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \text{対角成分に } \lambda \text{ がある行は } k \text{ 行}$$

$$R_n(k,\ell;\alpha) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha &&& \\ &&&& 1 & & & 0 &&& \\ &&&&& \ddots & & \vdots &&& \\ &&&&&& 1 & 0 &&& \\ &&&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \alpha \text{ があるのは } (k,\ell) \text{ 成分}$$

命題 3.14 基本行列 $P_n(k,\ell), Q_n(k;\lambda), R_n(k,\ell;\alpha)$ は正則行列 (逆行列が存在する行列) で，その逆行列，転置行列も基本行列である。実際逆行列，転置行列は次の様に与えられる。

$$\begin{aligned} P_n(k,\ell)^{-1} &= P_n(k,\ell), & P_n(k,\ell)^T &= P_n(k,\ell) \\ Q_n(k\,;\lambda)^{-1} &= Q_n\left(k\,;\frac{1}{\lambda}\right), & Q_n(k\,;\lambda)^T &= Q_n(k\,;\lambda) \\ R_n(k,\ell\,;\alpha)^{-1} &= R_n(k,\ell\,;-\alpha), & R_n(k,\ell\,;\alpha)^T &= R_n(\ell,k\,;\alpha) \end{aligned}$$

命題 3.15 基本変形とは基本行列をかける事を意味する。即ち A に基本変形を行って得られる行列を A' とすると，ある基本行列 B が存在して $A' = AB$ または $A' = BA$ となっている。行基

本変形に対応するのは左からかけた場合 $A' = BA$ に対応し，列基本変形には右からかけた場合 $A' = AB$ に対応する。具体的には次の関係がある。

(1) 基本変形が A の k 行と ℓ 行の入替えのとき $A' = P_n(k,\ell)A$
(2) 基本変形が A の k 列と ℓ 列の入替えのとき $A' = AP_m(k,\ell)$
(3) 基本変形が A の k 行に 0 でないスカラー λ をかける操作のとき $A' = Q_n(k\,;\lambda)A$
(4) 基本変形が A の k 列に 0 でないスカラー λ をかける操作のとき $A' = AQ_m(k\,;\lambda)$
(5) 基本変形が A の k 行に ℓ 行のスカラー α 倍を加える操作のとき $A' = R_n(k,\ell\,;\alpha)A$
(6) 基本変形が A の ℓ 列に k 列のスカラー α 倍を加える操作のとき $A' = AR_m(k,\ell\,;\alpha)$

演習問題 3.11　命題 3.14 および命題 3.15 を証明せよ。

基本変形を行なうとは基本行列をかける事なので，基本変形を何回か行なうということは正則な行列を左右からかける事になっている。この事から次の命題が証明される。これを用いると逆行列の計算が割と楽にできる。

命題 3.12 の証明：　基本変形を行列の積に置き換えると，基本行列 $A_1,\dots,A_t,B_1,\dots,B_s$ が存在して

$$B_s\cdots B_1AA_1\cdots A_t = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで A は正則行列なので $\mathrm{rank}(A) = n$ である。即ち右辺は O の部分はなく E_n となり

$$B_s\cdots B_1AA_1\cdots A_t = E_n$$

となる。ここで両辺に右から A_t^{-1} をかけると

$$B_s\cdots B_1AA_1\cdots A_{t-1} = B_s\cdots B_1AA_1\cdots A_tA_t^{-1} = E_nA_t^{-1} = A_t^{-1}$$

となる。さらに両辺に左から A_t をかけると，

$$A_tB_s\cdots B_1AA_1\cdots A_{t-1} = A_tA_t^{-1} = E_n$$

となる。以下これを繰り返していくと，

$$A_1\cdots A_tB_s\cdots B_1A = E$$

を得る。この事は A は行基本変形だけで E_n に変形できる事を示している。 ∎

命題 3.16 正則な n 次行列 A に対し $(A\,|\,E_n)$ を行基本変形で $(E_n\,|\,B)$ に変形したとき，$B = A^{-1}$ が成立する。

証明　$(A|E_n)$ を行基本変形で $(E_n|B)$ にしたとき，基本行列の積でかける行列 X(前でいうと $A_1\cdots A_tB_s\cdots B_1$) が存在して $X(A|E_n) = (E_n|B)$ となっている。このとき $XA = E_n$, $XE_n = B$ となるので，$X = A^{-1}$ かつ $X = B$ よって $B = A^{-1}$ となる。 ∎

変形が途中でできなくなれば正則ではない。コンピュータ等では普通この方法で逆行列を計算する。

演習問題 3.12　次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$