線型解析 II 要綱 #5 2005–11–7 河野

4 行列式

2 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対しては前期に 2.7 節で，その行列式 $\det(A)$ を $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ で定義した。そして行列式 $\det(A)$ は『 A が逆行列を持つ $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$ 』という性質を持つことにふれた (定理 2.27)。

これを一般の n 次行列に対しても定義し，その性質を調べるのがこの章の目的である。

4.1 2 次, 3 次行列の行列式

n 次の行列に対し行列式を定義するために，最初に，2 次の場合及び 3 次の場合行列式とはどの様なものかを考える。幾何的ベクトルも考えるので，この節ではしばらく行列の成分は実数としておく。

2 次の場合も 3 次の場合も行列式は「幾何的」側面と「代数的」側面を持つ。最初に幾何的側面を見ておこう。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とおく。2 次行列に対し，その行列式は $\det(A) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定義した。またこれを $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ と書くこともある。$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書くのは 2 つの 2 次元ベクトルの組に対し実数が対応していると考えるからである。

このように見たとき行列式 $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行 4 辺形の「有向面積」と考えられる。即ち絶対値は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積を表し，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負の値をとる。$A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})$ に対し線型写像 f_A を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ とすると，次の関係が成立することが分かる。

定理 4.1

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ は 1 次独立である} \\ &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ は } \mathrm{Im}(f_A) \text{ の基底をなす} \\ &\Longleftrightarrow \quad A \text{ は逆行列をもつ} \\ &\Longleftrightarrow \quad f_A \text{ に対し逆写像 } f_B \text{ が存在する} \end{aligned}$$

証明 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ なので $\det(A) \neq 0$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でないことを意味する。よって最初の「$\Longleftrightarrow$」は成立する。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は $\mathrm{Im}(f_A)$ を生成することは知られている。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立のとき $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底になる。逆は基底の条件に 1 次独立があるので成立している。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathrm{Im}(f_a)$ の基底になっているとき，$\mathrm{Im}(f_A) = \boldsymbol{R}^2$ なので $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底でもある。よって任意のベクトルは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で表示できる。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{e}_1 = b_{11}\boldsymbol{a} + b_{12}\boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{e}_2 = b_{21}\boldsymbol{a} + b_{22}\boldsymbol{b}$$

となるような実数 $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ が存在する。これを $\boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$ と書いて成分で書き直すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

となり A は逆行列を持つ。逆に A が逆行列 B を持つとき $BA = E$ なので $B\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$, $B\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$ となっている。今 $a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を満たす a, b に対し両辺に B をかけると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = B\boldsymbol{0} = B(a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b}) = aB\boldsymbol{a} + bB\boldsymbol{b} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となり，$a = b = 0$ となるので $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は1次独立である。最後の「$\Longleftarrow$」は演習問題に残しておく。
∎

演習問題 4.1　A が逆行列をもつ事と f_A が逆写像をもつ事が同値である事を示せ。

3 次行列に対しても定理 4.1 が成立するように「行列式」を定義したい。そのために 3 項ベクトルに対し外積を定義する。

定義 4.2 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**外積** (*outer product*) または**ベクトル積** (vector product) という。

命題 4.3 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と直交する。$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の絶対値は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積である。また $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ が右手系をなす。

証明　内積 $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ はそれぞれ 0 になるので $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{y}$ が分かる。
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積を S とすると，$S^2 = (|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\theta)^2$ より，$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ を得る。これを計算すると，$S^2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$ で $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|$ は平行 4 辺形の面積になる。
また $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ より $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ が右手系をなす事が分かる。∎

命題 4.4 外積は次の性質を持つ。

(1) [**多重線型性**]　$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $(\alpha\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{y})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ に対し $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}'$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し $\boldsymbol{x} \times (\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$

(2) [**交代性**]　$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$

逆にこの 3 つの性質で外積は特徴付けられる。即ち 3 項数ベクトルの 2 個の組に対し，実数を対応させる写像が上の (1) 多重線型性，(2) 交代性，(3) 基本ベクトルに対する値，の 3 つの性質を持つとき，それは外積と一致する。

命題 4.5 $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が右手系のときは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が張る平行 6 面体の体積になる。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が左手系のときは，体積にマイナスをつけたものになる。

演習問題 *4.2　命題 4.4，4.5 及びを証明せよ。

定義 4.6 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくとき，A をベクトルを 3 つ並べたものと見て $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ と書く。このとき

$$\det(A) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

を A の**行列式** (*determinant*) と呼ぶ。

$\det(A)$ は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る平行 6 面体の「有向体積」と考えることができる。即ち命題 4.5 から $\det(A)$ の絶対値は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る平行 6 面体の体積であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負をの値をとる。

命題 4.7 $A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ に対し

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

とおくと $\widetilde{A}A = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成立する。

この命題は計算により出てくる。これを用いると次が得られる。

演習問題 4.3　命題 4.7 を証明せよ。

定理 4.8 行列 A に対し命題 4.7 で定義された $\widetilde{A}$ を考える。このとき $A\widetilde{A} = A\widetilde{A} = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。特に $\det(A) \neq 0$ のとき逆行列が存在して $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ となる。

演習問題 ***4.4**　定理 4.8 を証明せよ。

次に代数的性質を見よう。2 次行列の行列式は代数的には次の性質を持つ実数への写像と考えられる。

命題 4.9 2 次行列の行列式に対し次が成立する。

(1) [**多重線型性**]　$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}') = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(2) [**交代性**]　$\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$

逆にこの 3 つの性質は行列式を特徴づける。実際 2 次元ベクトル 2 個の組に対し実数を対応させる写像 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である。

演習問題 4.5　命題 4.9 を証明せよ。

演習問題 4.6　$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である事を示せ。この事から (1), (2), (3) を満たせば，$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が分かる。

次に 3 次行列に対する行列式の代数的性質を考えよう。3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，$\det(A) = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と定義したが，これを 3 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に対し実数を対応させる写像と見て $\det(A) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と書くと次の性質を持つ事が分かる。

命題 4.10

(1) [**多重線型性**]　$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3)$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \alpha\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_3') = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3')$

2") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(2) [**交代性**]　$\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$$

証明　$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ 以外はそれ程難しくないので演習問題にまわす。$D = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3), \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ を考える。$\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ は $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ と直交するので $D = 0$ となる。また多重線型性は証明されているとして，それを用いると $D = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3)$ となる。$i = 2, 3$ に対し $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_i$ は直交するので，$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = 0$ となる。以上から $0 = D = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$ となり，命題が示される。 ∎

演習問題 4.7　命題 4.10 を証明せよ。

命題 4.11 ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が上の (1), (2) を満たすとき

$$D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\}$$

となる。とくに行列式に対し

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

が成立する。

略証　$i = 1, 2, 3$ に対し $\boldsymbol{a}_i = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + a_{3i}\boldsymbol{e}_3$ と書けるので，これを用いて $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を変形していけば得られる。 ∎

次節で一般の n に対しては拡張を行うが，代数的な立場から，即ち命題 4.10 が成立する様に拡張を行う。

演習問題 4.8　3 次行列の行列式に対しても定理 4.1 と同様の事が成立している事を示せ。即ち $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とし，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ とおく。また行列 A に対し線型写像 f_A を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると次が成立する事を示せ。

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ は 1 次独立である} \\ &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ は} \operatorname{Im}(f_A) \text{ の基底をなす} \\ &\Longleftrightarrow \quad A \text{ は逆行列をもつ} \\ &\Longleftrightarrow \quad f_A \text{ に対し逆写像 } f_B \text{ が存在する} \end{aligned}$$