線型解析 II 要綱 #7 2005–11–14 河野

4.3 行列式の計算 (I)

ここでは命題 4.13, 4.14, 演習問題 4.9 を用いた行列式の計算方法の 1 つを紹介する。つまり，命題 4.13 を用いて行列式を命題 4.14 の形にする。そして命題 4.14 を用いて $n-1$ 次の行列式に帰着させる。次数を下げていけば 2 次または 3 次の行列式の計算に帰着できる。例を見よう。

例 4.21
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 80$$

演習問題 4.14 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ (因数分解した形で)

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$ (因数分解した形で)

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ (n は 5 以上の自然数)

4.4 積の行列式と逆行列

この節では行列式と逆行列について調べる。目標は 2 次元の場合高校で学んだ '$\det(A) \neq 0$ なら逆行列が存在する' という命題を一般の場合に証明する事である。まず，積の行列の行列式に対し次が成立する。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

定理 4.22 積の行列式

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明　$B = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)$ とおくと $AB = A(\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{b}_n)$。よって $\det(AB) = \det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ $= F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ とおくと F は多重線型性と交代性を持つ。補題 4.15 より

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\det(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)。$$

$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \det(A)$ なので定理が証明される。∎

この定理からは A が逆行列を持てば $\det(A) \neq 0$ がでてくる。逆をいうためにはまだ十分ではない。

いくつかの定義を続けよう。n 次行列 A に対しその i 行と j 列を取り除いてできる $n-1$ 次行列を A_{ij} と書く。

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。この時 A_{33} は 3 行と 3 列を取り除いた行列なので

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。また A_{12} は

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

になる。この時次が成立する。

定理 4.23 $\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ とし，

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})^T$$

とおくとき

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E_n$$

この定理から次の系が得られる。

系 4.24 [(1)]$\det(A) \neq 0$ の時 A は逆行列を持ち

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$$

[(1)] この逆行列を求める式は理論的には大切であるが，次数が大きくなると実際の計算には手間がかかりあまり実用的とは言えない。“掃き出し法” と呼ばれる方法があり，これは計算の手間も少ない (コンピュータで逆行列を計算する時用いられている)。これについては 3.5 節で取り上げた。

証明の前に先程の例を計算しよう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であった。$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $\widetilde{a}_{11} = (-1)^{(1+1)} \det(A_{11}) = 1$。同様に計算すると $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det(A)E_3。$$

定理の略証　$\widetilde{A}A = \det(A)E_n$ も同様にできるので $A\widetilde{A} = \det(A)E_n$ のみ示す。$A\widetilde{A} = (b_{ij})$ とおく。ここで

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{js} &= (-1)^{j+s} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & 0 & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & 0 & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & 0 & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & 0 & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & a_{j-1s} & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & a_{j+1s} & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

なので，$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\widetilde{a}_{js}$ より，

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & a_{j-1s} & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{is-1} & a_{is} & a_{is+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & a_{j+1s} & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

が分かる。よって $i = j$ の時は $b_{ij} = b_{ii} = \det(A)$ となる。$i \neq j$ の時は j 行に i 行目のベクトルを入れたものになっているので $b_{ij} = 0$ が成立している。 ∎

演習問題 4.15　次の行列が逆行列を持つ時はそれを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。最初にこの節で学んだ方法で計算し，その後以前学んだ基本変形を用いる方法で計算せよ。そして計算量を比較せよ。

逆行列を持たない番号のものは，それがわかった段階で終了してもよいし，計算力をつけるため友人の番号で計算してもよい。

さらに力をつけたいものは a, b, c, d を一般の定数として計算せよ。

ベクトルの 1 次独立と行列式の間には次の様な関係がある事を最後に注意しておく。

命題 4.25 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルとすると，

$$\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \text{は}1\text{次独立}$$

証明　(1)($\Longrightarrow$)$A = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)$ とおき，スカラー $a_1, \ldots, a_n$ に対し $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$ が成立しているとする。系 4.24 より逆行列 A^{-1} が存在するが，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を基本ベクトルとすると

$$(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n) = E_n = A^{-1}A = A^{-1}(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n) = (A^{-1}\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ A^{-1}\boldsymbol{v}_n)$$

より $\boldsymbol{e}_i = A^{-1}\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成立する。

$$\boldsymbol{o} = A^{-1}\boldsymbol{o} = A^{-1}(a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n) = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

より $a_1 = \cdots = a_n = 0$。
(2)($\Longleftarrow$) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は基底になるので，各 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し，スカラー $b_{i1}, \ldots, b_{in}$ が存在して

$$\boldsymbol{e}_i = b_{i1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_{in}\boldsymbol{v}_n$$

と書ける。$B = (b_{ij})$ とおくと

$$(\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n) = B(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)$$

となるので $E_n = BA$ より $\det(A) \neq 0$。∎

演習問題 4.16　次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。ただし a, b は自分の学生番号の下２桁。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

4.5　行列式の計算 (II)

定理 4.23 を用いると行列式の計算の 2 つ目の方法 (展開) が得られる。
例で考える。

例 4.26 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ を例えば１行目で展開すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} &= a_{11}\widetilde{a}_{11} + a_{12}\widetilde{a}_{12} + a_{13}\widetilde{a}_{13} + a_{14}\widetilde{a}_{14} \\ &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}4\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 行目で展開すると $\det(A) = a_{21}\widetilde{a}_{21} + a_{22}\widetilde{a}_{22} + a_{23}\widetilde{a}_{23} + a_{24}\widetilde{a}_{24}$ となる。一般に n 次行列 A に対し，$\det(A) = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{is}\widetilde{a}_{is}$ を用いると i 行における展開，$\det(A) = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} \widetilde{a}_{is}a_{is}$ を用いると i 列に関する展開となる。

演習問題 4.17　この節の方法で演習問題 4.14 から 2 題問題を選び，行列式を計算せよ。