線型解析 II 要綱 #8

2005–11–28　　河野

5　固有値・固有ベクトルと対角化

この章では固有値・固有ベクトル・対角化について学ぶ。この問題ではスカラーが実数か複素数かで議論が変わってくる。特に断らない場合はどちらでも成立するが，実数と複素数で異なる場合はそれを注意する。

5.1　3 次行列の対角化

この節では 3 次行列の場合の対角化について議論する。一般の場合は次節で扱う。例から始めよう。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと
$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

対角成分以外が 0 であるような行列を**対角行列**と呼び，行列 A に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求め，実際に $P^{-1}AP$ を求める事を**対角化**という。

対角化には色々な応用がある。ここではべき乗の計算を取り上げる。A の n 乗を計算してみよう。$B = P^{-1}AP$ とおくと，$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$ となる。以下同様にして $B^n = P^{-1}A^nP$ を得る。B は対角行列なので

$$B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

が分かる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

最初の例に戻って考えよう。この例では P は天下りに与えられた。このような P はどの様にすれば見つかるかを考えたい。そこで，逆にもしこの様な P が存在したとして状況を見てみよう。$P = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，$AP = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。このとき $(A\boldsymbol{a}\ A\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{c}) = A(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (4\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ より $A\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{a}$,$A\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{b}$,$A\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{c}$ が得られる。逆にこの様な $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ で 1 次独立なものが見つかれば，命題 5.1 より行列 $(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ は正則である。$P = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とおくとき，この変形を逆にたどりると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。

次の命題は以前扱ったがもう一度述べておく。

命題 5.1 3 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が 1 次独立である事は $P = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ が逆行列を持つ事の必要十分条件である。

次の定義は 3 次行列についてであるが，n 次行列の場合もまったく同じであることを注意しておく。

定義 5.2 3 次行列 A に対し，スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の**固有値** (*eigenvalue, proper value*) と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の**固有ベクトル** (*eigenvector, proper vector*) と言う。

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace,proper subspace*) と言う。

$\Phi_A(t) = \Phi(t\,;\,A) = \det(tE_n - A)$ を A の**固有多項式** (*eigenpolynomial, proper polynomial*) といい，方程式，$\Phi_A(t) = 0$ を A の**固有方程式** (*eigenequation, proper equation, characteristic equation*) という。また，この方程式の解を**特性解** (*characteristic root*) をいう。

命題 5.3 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の 解 (特性解) が $\boldsymbol{K}$ に属していれば A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の $\boldsymbol{K}$ における解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 5.4 あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる事の必要十分条件は $\det(B) = 0$ である。

証明 (1)($\Longrightarrow$) 対偶を示す。$\det(B) \neq 0$ のとき，系 4.24 より逆行列が存在するので $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の左から B^{-1} をかけると $\boldsymbol{x} = B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，よって O.K.
(2)($\Longleftarrow$)$B = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とおく。命題 5.1 より $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立ではない。よってすべては 0 では

ない実数 x, y, z が存在して $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき，これを行列の形に直すと $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が得られる。 ∎

命題 5.3 は補題において $B = tE_n - A$ と考えるとでてくる。$\boldsymbol{K}$ が複素数の場合，解はいつでも複素数であるから，特性解はいつでも固有値である。実数の場合特性解が実数なら固有値，そうでなければ固有値でない。

演習問題 5.1　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

命題 5.5 3 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は 3 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が存在する事である。この時，$P = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ とおき，$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ が成立する。

証明　$\boldsymbol{u}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとする $(i = 1, 2, 3)$。このとき

$$
\begin{aligned}
AP &= A(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) \\
&= (A\boldsymbol{u}_1\ A\boldsymbol{u}_2 A\boldsymbol{u}_3) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{u}_1\ \lambda_2\boldsymbol{u}_2\ \lambda_3\boldsymbol{u}_3) \\
&= (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成立する。

一次独立な $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2$ が存在するとする。命題 5.1 より逆行列 P が存在するので対角化可能である。

逆に A が対角化可能であるとき，$P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ を A を対角化する行列，即ち P^1AP が対角行列とする。対角行列 $P^{-1}AP$ を $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ とすると，$A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \lambda_2\boldsymbol{u}_2, \lambda_3\boldsymbol{u}_3)$ となるので $\boldsymbol{u}_i$ は固有ベクトルである。P が逆行列を持つので $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立である。 ∎