線型解析 II 要綱 #10

2005–12–6　　河野

5.3 計量ベクトル空間

この章の残りの節では内積の定義されたベクトル空間の線型写像を考える事により，対称行列が直交行列により対角化可能である事を示す。内積は**複素数**上のベクトル空間の場合も考えることができる。実際量子力学では複素数上の議論が必要になる。しかしこの講義では実数上のベクトル空間についてのみ取り上げる。興味のあるものは参考書等を参考に。最初に平面のベクトル及び空間のベクトルの内積及び長さを復習しよう。

定義 5.13 平面のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$$

で定義した。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義した。

空間のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

で定義する。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義する。

内積を別の形で表現しておこう。ベクトル $\boldsymbol{x}$ は平面のベクトルであるか，空間のベクトルであるかにしたがって，$(2, 1)$ 行列または $(3, 1)$ 行列と見る事ができる。このとき転置行列 $\boldsymbol{x}^T$ を考える事ができる。このとき

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$$

となっている。

命題 5.14 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 等を平面または空間のベクトル，a を実数とする。このとき次が成立する。

(1)　[**正値性**]　任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。

(2)　[**対称性**]　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立する。

(3)　[**線型性**]

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 a に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(4)　$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とする。ただし $\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{0}$ のときは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ と定義する。このとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$ が成立する。特に $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交する必要十分条件は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

演習問題 5.7　命題 5.14 を示せ。
演習問題 5.8　命題 5.14 の内積の性質 (2), (3) から 2 番目の成分に関する線型性，すなわち
(5)　任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ ，および
(6)　任意の実数 α と任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
が成立することを示せ。

n 項数ベクトルに対し内積を定義する。

定義 5.15 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

で定義する。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義する。

命題 5.14 と同じ様に次が成立する。

命題 5.16　(1) [**正値性**] 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。

(2) [**対称性**] 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立する。

(3) [**線型性**]

1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

演習問題 5.9　命題 5.16 を示せ。

演習問題 5.10　演習問題 5.8 と同様に $\boldsymbol{R}^n$ の場合も 2 番目の成分に関して線型性をもつ。すなわち次が成立する。この事を証明せよ。
(1)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。
(2)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

命題 5.14 の (4) に対応する n 項数ベクトルの命題を考えたい。n が 4 以上の場合，n 項数ベクトルの間には角度というものが定義されていない。そこで角度というものを定義したい。そのために次の定理を必要とする。

定理 5.17 [Schwarz(シュワルツ) の不等式] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

証明 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とする。X を実数を動く変数と考え，$(x_1X + y_1)^2$ を考えると，$(x_1X + y_1)^2 \geqq 0$ が成立している。各 i $(i = 2, \ldots, n)$ に対しても同様に $(x_iX + y_i)^2 \geqq 0$ が成立している。これを $i = 1, \ldots, n$ まで足合わせると，

$$(x_1X + y_1)^2 + \cdots + (x_nX + y_n)^2 \geqq 0$$

が得られる。これを展開すると

$$(x_1^2 + \cdots + x_n)X^2 + 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)X + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geqq 0$$

となる。任意の実数 X に対し上式が成立しているので，2 次方程式の判別式は 0 以下である。よって

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leqq (x_1^2 + \cdots + x_n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

をえる。これが定理の式である。 ∎

演習問題 5.11 Schwarz の不等式から次の 3 角不等式を導け; 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

この定理を用いて 2 つのベクトルの間の角度を定義しよう。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ とする。ただし，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ としておく。このとき Schwarz の不等式より

$$-1 \leqq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \leqq 1$$

が成立している。このとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ となる θ で

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}$$

となるものが唯 1 つ存在する。このとき θ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角と定義する。

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$ と定義する。この様に定義すると命題 5.14 の (4) は $\boldsymbol{R}^n$ においても成立する事が分かる。

演習問題 5.12

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 4 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 5 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

定義 5.18 n 項数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ では，角度およびあるが，長さを定義する事ができる。$\boldsymbol{R}^n$ に限らなくても，実数上のベクトル空間には $\boldsymbol{R}^n$ の制限として内積を考えることができる。この様に内積が定義されているベクトル空間を**計量ベクトル空間**と呼ぶ。

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を計量ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルとする。これらのベクトルの長さがすべて 1 であり，お互いに直行しているとき，これらのベクトルの組を**正規直交系** (*orthonormal system*) という。

ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が正規直交系であるとき，この基底を**正規直交基底** (*orthonormal basis*) という。

1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が与えられたとき，次のように正規直交系を構成することができる。これを**シュミット** (Schmidt) **の直交化法**という。

最初に $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$ とおく。$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1$ とおき，$\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{\boldsymbol{y}_2}{\|\boldsymbol{y}_2\|}$ とおく。

$$\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2$$

とおき，$\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{\boldsymbol{y}_3}{\|\boldsymbol{y}_3\|}$ とおく。一般の場合は

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i$$

とおき，$\boldsymbol{x}_k = \dfrac{\boldsymbol{y}_k}{\|\boldsymbol{y}_k\|}$ とおく。

定理 5.19 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は正規直交系である。

証明 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = \left(\dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \boldsymbol{x}_1 \right) = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \left(\boldsymbol{v}_1, \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \right) = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) = \dfrac{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} = 1$ となる。よって $\boldsymbol{x}_1$ の長さは 1 である。$k > 1$ に関しても自分の長さで割り算をしているので，$k = 1$ のときと同様に $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k) = 1$ が示される。

$\boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ に対し $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$ ならば $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$ となる。よって $(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_1) = 0$ ならば，$(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = 0$ となる。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_1) &= (\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) + (-(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) \times 1 \\
&= (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = 0
\end{aligned}$$

なので，$(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = 0$ が示される。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{x}_1) &= (\boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) + (-(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) \times 1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) \times 0 \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = 0
\end{aligned}
$$

なので $(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1) = 0$ が示される。また

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{x}_2) &= (\boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) + (-(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) \times 0 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) \times 1 \\
&= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = 0
\end{aligned}
$$

なので $(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1) = 0$ が示される。

今 $1 \leqq i < j \leqq k$ となる i, j に関し $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ を仮定すると，$1 \leqq j \leqq k$ に対し $(\boldsymbol{y}_{k+1}, \boldsymbol{x}_j) = 0$ が成立することを示す。そうすれば帰納法によりすべての n での成立が示される。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}_{k+1}, \boldsymbol{x}_j) &= \left(\boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_i)\, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\right) \\
&= (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_j) - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_i)\, (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \\
&= (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_j) - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_i)\, \delta_{ij} \\
&= (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_j) - (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{x}_j) = 0
\end{aligned}
$$

となるので証明が終わる。 ∎

演習問題 5.13　定理 5.19 の証明で 1 次独立性を使っていないように見えるが，実はそのことは使われている。どの部分に使われているか指摘せよ。

演習問題 5.14　次のベクトルの組からシュミットの直交化法を用いて正規直交系をつくれ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

正規直交基底の定義をしたので，対角化と基底の取り替えの関係について考える。最初に例を考える。$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し $P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ とおくと，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ となり，

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これが対角化であった。これを座標変換の立場から考えてみよう。ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と成分表示されるが，これは

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

と書いたときの係数 x_1, x_2 である。通常の成分表示は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に関する成分表示と考えれば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に関する成分表示を考えることができる。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ も基底なので，任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と書くことができる。実際 $a_1 = x_1 - x_2$, $a_2 = 2x_2 - x_1$ がこの関係をみたす。このとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

と書くことにする。行列 A を表現行列にもつ線型写像を T とする。この T を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に関する座標で表現してみよう。$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

なので $y_1 = 3x_1 - 2x_2$, $y_2 = x_1$ という関係がある。$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とすると，$x_1 = 2a_1 + a_2$, $x_2 = a_1 + a_2$, $y_1 = 2b_1 + b_2$, $y_2 = b_1 + b_2$ が成立しているので，これから x_1, x_2, y_1, y_2 を消去すると $b_1 = 2a_1$, $b_2 = a_2$ となる。すなわち

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

となる。A を線型写像 T の (基本ベクトルに関する) 表現行列とする。基底 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 対し $P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ とおき，$B = P^{-1}AP$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ に関する表現行列は B となる。このことは一般的にも成立する。

演習問題 5.15　次の行列 A で表現される線型写像を与えられた基底で表現した場合の行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

しかし $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は直交していないので内積とは相性が悪い。この成分表示に関する内積を計算してみよう。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 = (2a_1 + a_2)(2b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = 5a_1b_1 + 3a_2b_1 + 3a_1b_2 + 2a_2b_2$ となるので

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = 5a_1b_1 + 3a_2b_1 + 3a_1b_2 + 2a_2b_2$$

となる。しかし $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が正規直交基底の場合は (勿論例で考えた $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とは別のベクトルである) $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ なので，$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2$ に対し

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) &= (a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2, b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2) \\ &= a_1b_1\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) + a_1b_2\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + a_2b_1\,(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) + a_2b_2\,(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

となり，基本ベクトルに対する通常の内積の表示と一致している。

次の節では正規直交基底でこのようなものを選べるかという問題について考える。