線型解析 II 要綱 #11 　　2006–1–16　　河野

5.4 計量ベクトル空間と対角化

以下では $\mathbb{R}^n$ は計量ベクトル空間とする。定義をいくつかする。

定義 5.20 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への (これを $\mathbb{R}^n$ 上のという) 線型写像を T とする。T に対し次の性質を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の線型写像 T^* を T の**随伴写像** (*adjoint mapping*) と呼ぶ : 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y}))$$

が成立する。

$T = T^*$ が成立するとき**対称変換** (*symmetric transformation*) という。また任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成立するとき**直交変換** (*orthnormal transformation*) という。

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し A の転置行列 A^T を A の**随伴行列** (*adjoint matrix*) という。A が $A = A^T$ を満たすとき**対称行列** (*symmetric matrix*) という。また $A^T A = E$ を満たすとき**直交行列** (*orthnormal matrix*) という。

命題 5.21 線型写像 T の表現行列を A とする。このとき T の随伴写像 T^* の表現行列は A^T である。また
(1) T は対称変換 $\iff$ A は対称行列
(2) T は直交変換 $\iff$ A は直交行列
が成立する。

この命題を証明するため補題を 1 つ用意する。

補題 5.22 T, T' を $\mathbb{R}^n$ 上の線型写像とする。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (T'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ が成立するとき，$T = T'$ である。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, T'(\boldsymbol{y}))$ が成立するとき，$T = T'$ である。

A, A' を n 次行列とする。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A'\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立するとき，$A = A'$ である。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A'\boldsymbol{y})$ が成立するとき，$A = A'$ である。

証明　最初に $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ が任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{y})$ ならば $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$ が成立する事を注意しておく。なぜなら，任意の $\boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{y}) = 0$ が成立しているが，特に $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$ とおくと $\|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2\|^2 = (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = 0$ となるので $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$ となる。

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (T'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ が成立しているとき，前の注意より $T(\boldsymbol{x}) = T'(\boldsymbol{x})$ が分かる。任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = T'(\boldsymbol{x})$ なので $T = T'$ となる。

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A'\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立しているとき，前の注意より任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $A\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{x}$ が分かる。$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n), A' = (\boldsymbol{a}'_1 \cdots \boldsymbol{a}'_n)$ と置く。$\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i, A'\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}'_i$ となるので $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i$ となる。よって $A = A'$ となる。以上最初の成分に T ま

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

たは A がかかっている場合を証明した。第 2 成分に T または A がかかっている場合は演習に残す。 ∎

命題 5.21 の証明： A^T を表現行列にもつ写像を T' とする。T' が T の随伴写像である事を示す。任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}) &= (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^TA^T)\boldsymbol{y}\\ &= \boldsymbol{x}^T(A^T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},A^T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},T'(\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

となるので，随伴写像の存在，及びその表現行列が A^T である事が分かる。

A が対称行列のとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x},T^*(\boldsymbol{y}))=(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A^T\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{y}))$ となるので，$T^*=T$ となり，T は対称変換である事が分かる。逆に T が対称変換のとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x},A^T\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})$ となるので，$A=A^T$ となり，A が対称行列である事が分かる。

A が直交行列のとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し $(T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{y}))=(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A^TA\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},E\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ となり，T は直交変換である。逆に T が直交変換のとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x},A^TA\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},E\boldsymbol{y})$ となるので，$A^TA=E$ となり，A が直交行列である事が分かる。 ∎

演習問題 5.16 補題 5.22 の残りを証明せよ。即ち次を証明せよ；T,T' を $\mathbb{R}^n$ 上の線型写像とする。任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},T'(\boldsymbol{y}))$ が成立するとき，$T=T'$ である。

A,A' を n 次行列とする。任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A'\boldsymbol{y})$ が成立するとき，$A=A'$ である。

A を 2 次行列とする。このとき 2 項数ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ を用いて $A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$ と書ける。このとき

$$A\text{ は直交行列}\Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\text{は正規直交系}$$

が成立している。なぜなら

$$\begin{aligned}A^TA &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)\\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\\ (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成立しているので，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が正規直交系のときは $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)=1$, $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=0$, $(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)=1$ となるので，$A^TA=E$ となり A は直交行列になる。逆に A が直交行列のときは $A^TA=E$ なので $\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\\ (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix}=E$ より，$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)=1$, $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=0$, $(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)=1$ となり $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は正規直交系となる。このことは一般の n で成立する (演習問題 5.17)。

演習問題 5.17 n 次行列 A を $A=(\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n)$ と表すとき，A が直交行列である必要十分条件は $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が正規直交系である事である事を示せ。

この節の目標に立ち帰ろう。計量ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上の線型写像 T とその表現行列 A を考える。スカラー λ とベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が

$$T(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}), \qquad A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$$

を満たすときスカラー $\lambda \in \mathbb{R}$ を T または A の固有値といい，ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を固有ベクトルと定義した。λ が $\lambda \in \mathbb{R}$ であって固有方程式 $\Phi_A(t) = \det(A - tE) = 0$ の解になるとき (λ が特性解であるとき) 線型写像 T の固有値であり，行列 A の固有値であった。対称変換・対称行列の場合，固有値は実数である事が分かる。

命題 5.23 対称行列 A に対しその特性解 λ は実数である。

証明 λ を $\Phi_A(t) = 0$ の解とする。$\mathbb{C}^n$ の世界で考えると固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する。このとき $\overline{A}$, $\overline{\boldsymbol{x}}$ を A, $\boldsymbol{x}$ の各成分をその共役複素数で置き換えた行列およびベクトルとする。A の成分は実数なので $\overline{A^T} = A^T = A$ が成立する。

$$\overline{\boldsymbol{x}^T}(A\boldsymbol{x}) \;=\; \overline{\boldsymbol{x}^T}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}^T}\boldsymbol{x}$$

であり，

$$\overline{\boldsymbol{x}^T}(A\boldsymbol{x}) \;=\; (\overline{\boldsymbol{x}^T}A)\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{x}^T A^T})\boldsymbol{x} = \overline{(\boldsymbol{x}^T A^T)}\boldsymbol{x} = \overline{(A\boldsymbol{x})^T}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}^T}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}^T}\boldsymbol{x}$$

となる。よって

$$(\overline{\lambda} - \lambda)\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 0$$

が成立する。ここで $\boldsymbol{x} = (x_i)$ とすると $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$ が分かる。よって λ は実数である。 ∎

命題 5.24 λ_1, λ_2 を対称行列 A の相異なる固有値とする。$i = 1, 2$ に対し $\boldsymbol{x}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとすると，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する，即ち $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。

証明 $(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ であり，$(T(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, T(\boldsymbol{x}_2)) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ より $(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ より $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。 ∎

対称行列が対角化可能である事を示そう。そのために幾つか補題を用意する。いずれも証明は難しくないので演習問題とする。

補題 5.25 (1) A を対称行列，O を直交行列とすると，$O^T AO$ は対称行列である。

(2) O, O' を直交行列とすると OO' も直交行列である。

(3) $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n), B = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n)$ を n 次行列とする。$A^T B$ の (i, j) 成分は $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)$ である。

演習問題 5.18 補題 5.25 を証明せよ。

定理 5.26 対称行列は直交行列により対角化可能である。即ち A を対称行列とすると，ある直交行列 O が存在して $O^T AO$ は対角行列になる。

証明　行列のサイズ n に関する帰納法で示す。$n=1$ のときすべての行列は対角行列なので定理は性質している。k 次行列に対しては定理が成立していると仮定する。A を $k+1$ 次の対称行列とする。固有方程式 $\Phi_A(t)=0$ の解を λ とすると，命題 5.23 より λ は実数である。λ に属する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_0$ とする。必要なら $\dfrac{\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0\|}$ を考える事により $\|\boldsymbol{x}_0\|=1$ としてよい。$\mathbb{R}^{k+1}$ のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ で $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が正規直交系になるものをとる。$O_0=(\boldsymbol{x}_0\,\boldsymbol{x}_1\,\cdots\,\boldsymbol{x}_k)$ と置くと，演習問題 5.17 より O_0 は直交行列になる。補題 5.25 より $B=O_0^TAO_0$ は対称行列であるが，再び補題 5.25 より

$$
\begin{aligned}
B &= O_0^TAO_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_0^T\\ \boldsymbol{x}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}A(\boldsymbol{x}_0\ \boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_k)\\
&= \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_0^T\\ \boldsymbol{x}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}(A\boldsymbol{x}_0\ A\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_k)\\
&= \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_0^T\\ \boldsymbol{x}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}(\lambda\boldsymbol{x}_0\ A\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_k)\\
&= \begin{pmatrix}\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1k+1}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & b_{k+12} & \cdots & b_{k+1k+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。B は対称行列なので，

$$
B=B^T=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{k+12}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1k+1} & b_{2k+1} & \cdots & b_{k+1k+1}\end{pmatrix}
$$

となり，$b_{12}=\cdots=b_{1k+1}=0$ となる。よって $B=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & b_{k+12} & \cdots & b_{k+1k+1}\end{pmatrix}$ となっている。$A_1=\begin{pmatrix}b_{22} & \cdots & b_{2k+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{k+12} & \cdots & b_{k+1k+1}\end{pmatrix}$ と置くと，A_1 は k 次の対称行列になっている。

帰納法の仮定より k 次の直交行列 O_1 が存在して $O_1^T A_1 O_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$ となっている。

$O' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ と置くと O' は $k+1$ 次の直交行列で,

$$\begin{aligned} O'^T B O' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1^T A_1 O_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。$O = O_0 O'$ と置くと，O は直交行列で，$O^T A O$ が対角行列になっているので定理は示された。∎

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合を例にとり，実際に対称行列を直交行列により対角化しよう。計量を考えないで行った対角化と重複する点は多い。ただし，対角化する行列が直交行列になるように選ぶ必要がある。A の固有方程式を計算すると

$$\Phi_A(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$$

となる。よって固有値は $t = 4, 1$ となる。4 に対応する固有ベクトルを求める。計量を考えにいれなければ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことができた。しかし，対角化する行列が直交行列になるためには，固有ベクトルの長さが 1 である必要がある。よって

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。

次に 1 に対応する固有ベクトルを選ぶ。計量を考えにいれなければ

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。しかし対角化する行列が直交行列になるためには，固有ベクトルが正規直交系になる必要がある。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ からシュミットの直交化法で正規直交系をつくる。

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|}\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

を得る。O は直交行列なので $O^{-1} = O^T$ であり，

$$O^T A O = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 5.19　次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$