線型解析 II 要綱 #14	2006–2–7	河野

6.4 連立微分方程式

この節では連立線型微分方程式の解法を考える。連立微分方程式とは，例えば，３つの微分方程式が連立されているときは以下のようなものである。x, y, z は t の関数とする。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y + z \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + 2z \end{aligned}$$

この形の微分方程式を対角化の考えを利用して解いてみよう。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と置くと，この方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} \tag{1}$$

と表される。A の対角化を考える。行列の対角化の方法を用いると，例えば

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を見つける事ができて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置く。式 (1) は $\dfrac{d}{dt}\left(P^{-1}\boldsymbol{x}\right) = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ に注意すると，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} \tag{2}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

と変形できる。この式 (2) は成分で書くと，

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \\ \frac{dv}{dt} &= v \\ \frac{dw}{dt} &= 4w \end{aligned}$$

なので，簡単に解けて $u = C_1 e^t, v = C_2 e^t, w = C_3 e^{4t}$ となるので，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ を用いると，

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^t + C_3 e^{4t} \\ y &= -C_1 e^t + C_3 e^{4t} \\ z &= -C_2 e^t + C_3 e^{4t} \end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 6.8　行列 A が次の形の行列のとき，式 (1) の形の微分方程式を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

次に対角化できない場合を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - y \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix},$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ と置くと，この方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} \tag{3}$$

と表される。A の対角化を考えたいが，これは対角化できない。そこで 3 角化を考える。固有値 1 に対応する固有ベクトルは 1 つは見つかる。これを例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく。もう一つ固有ベクトルは見つからないので，任意のベクトル (ただし 1 次独立になるようなベクトル) を選ぶ。ここではたとでば $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとり，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となっている。3 角化を行うと微分方程式は以前より解きやすくなる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置くと，$P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \dfrac{dP^{-1}\boldsymbol{x}}{dt}$ に注意すると，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} \tag{4}$$

と変形できる。この式 (4) は成分で書くと，

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u + 2v \\ \frac{dv}{dt} &= v \end{aligned}$$

である。v は簡単に解けて $v = C_1e^t$ となるので，u に関する微分方程式

$$\frac{du}{dt} = u + 2C_1e^t = e^t\left(e^{-t}u + 2C_1\right)$$

を得る。$w = e^{-t}u + 2C_1$ とおく事により微分方程式 $w' = 2C_1$ が得られ，これを解くと $w = 2C_1t + C_2$ となる。よって $u = 2C_1te^t + (C_2 - 2C_1)e^t$ を得る。結局

$$x = u = (C_2 - 2C_1)e^t + 2C_1te^t \qquad y = -u + v = (3C_1 - C_2)e^t - 2C_1te^t$$

が分かる。

演習問題 6.9　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，3) の形の微分方程式を解け。

連立微分方程式と 2 階の同次型線型微分方程式は一見違うものに見えるが，本質的には同じものである。例えば $y'' + ay' + by = 0$ という微分方程式は $z = y'$ とおくと，$z' + az + by = 0$ つまり

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 6.10　行列 A が次の形の行列のとき，式 (1) の形の微分方程式を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

連立線型微分方程式を解く別の方法を紹介しよう。行列乗の関数を定義し，それを計算する事により解を求める方法である。指数関数はテーラーの定理を用いて

$$y = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

と書き表された。そこで n 次行列 X に対し

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots$$

と定義しよう。これが定義されるためには，各成分毎に収束する事が必要だが，その証明はここでは省略する。n 次行列 A に対し

$$\begin{aligned} Y = e^{At} &= E + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(At)^n + \cdots \\ &= E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= A + A^2t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^nt^{n-1} + \cdots \\ &= A\left(E + At + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} + \cdots\right) \\ &= A\left(e^{At}\right) \end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ とおき，$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$ とおくと $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \dfrac{de^{At}}{dt}\boldsymbol{x}_0 + e^{At}\dfrac{d\boldsymbol{x}_0}{dt}$ となる。今 $\boldsymbol{x}_0$ は定数ベクトルとすると，$\dfrac{d\boldsymbol{x}_0}{dt} = \mathbf{0}$ なので，$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \dfrac{de^{At}}{dt}\boldsymbol{x}_0 = Ae^{At}\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}$ が分かる。

以上により微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

の解で $X(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ を満たすものは $\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$ という形をしている事が分かった。残っている問題は具体的に e^{At} を計算する事である。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を例に計算しよう。この行列は $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化できた。$B^n = P^{-1}A^nP$ である事に注意すると

$$\begin{aligned} P^{-1}e^{At}P &= P^{-1}\left(E + At + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots\right)P \\ &= P^{-1}EP + P^{-1}APt + \cdots + \frac{1}{n!}P^{-1}A^nPt^n + \cdots \\ &= E + Bt + \cdots + \frac{1}{n!}B^nt^n + \cdots \\ &= e^{Bt} \end{aligned}$$

となる。ここで $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= E + Bt + \cdots + \frac{1}{n!}B^nt^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}t + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}t^t + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる[(1)]。よって

$$e^{At}=P\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{4t}\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t+e^{4t} & -e^t+e^{4t} & -e^t+e^{4t}\\ -e^t+e^{4t} & 2e^t+e^{4t} & -e^t+e^{4t}\\ -e^t+e^{4t} & -e^t+e^{4t} & 2e^t+e^{4t}\end{pmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{x}=e^{At}\boldsymbol{x}_0$ が計算できる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\left(2x_0-y_0-z_0\right)e^t+\frac{1}{3}\left(x_0+y_0+z_0\right)e^{4t}\\ y &= \frac{1}{3}\left(-x_0+2y_0-z_0\right)e^t+\frac{1}{3}\left(x_0+y_0+z_0\right)e^{4t}\\ z &= \frac{1}{3}\left(-x_0-y_0+2z_0\right)e^t+\frac{1}{3}\left(x_0+y_0+z_0\right)e^{4t} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 6.11　この方法で演習問題 6.8 の微分方程式を解け。

[(1)]一般に対角行列 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$ に対し $e^{Bt}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}$ となる。