線形解析 II 問題解説 #2

河野

演習問題 2.1　命題 3.2 を証明せよ。また準標準準型へは行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で変形できることを示せ (線形解析 I 命題 1.1 を参考に)。

命題 1.1 の証明と同じ方法で，行基本変形と列基本変形 (3) のみを用いて，行列 A を行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2r} & b_{2r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{rr+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

に変形できる。

1 行目に r 行目の $-b_{1r}$ 倍を加えることにより，$(1,r)$ 成分は 0 になる。2 行目に r 行目の $-b_{2r}$ 倍を加えることにより，$(2,r)$ 成分は 0 になる。以下 3 行目から $r-1$ 行目までの各 i 行に r 行目の $-b_{ir}$ 倍を加えることにより，(i,r) 成分は 0 になる。以上により r 列は (r,r) 成分以外は 0 になった。

上の操作を $r-1$ 行目を起点に行う。即ち，1 行目に $r-1$ 行目の $-b_{1r-1}$ 倍を加えることにより，$(1,r-1)$ 成分は 0 になる。2 行目に $r-1$ 行目の $-b_{2r-1}$ 倍を加えることにより，$(2,r-1)$ 成分は 0 になる。以下 3 行目から $r-2$ 行目までの各 i 行に $r-1$ 行目の $-b_{ir-1}$ 倍を加えることにより，$(i,r-1)$ 成分は 0 になる。以上により $r-1$ 列は $(r-1,r-1)$ 成分以外は 0 になった。

上で述べた操作を $r-2, r-3, \cdots, 2$ で行うと，行列 B は行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

に変形される。これは準標準準型なので，演習問題の後半部分は証明された。

C を標準型に直すには列基本変形を使う。1 列目の $-c_{1r+1}$ 倍を $r+1$ 列に加える。次に 2 列目の $-c_{2r+1}$ 倍を $r+1$ 列に加える。以下 3 列目から r 列まで各 i 列に対し，その $-c_{ir+1}$ 倍を $r+1$ 列に加える。この操作を実行すると $r+1$ 列の成分はすべて 0 となる。

上に述べた操作を $r+2, \cdots, n$ 列に行うと，結果として標準型が得られる。

演習問題 2.2　次の行列に基本変形を行なって標準形または準標準形にせよ (線形解析 I 演習問題 1.3 と同じ問題)。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

この問題も前期に解説しているので，それを参考のこと。

演習問題 2.3 命題 3.3 を証明せよ。また列基本変形の場合に変数間にどの様な対応があるかも考えよ。

$\widetilde{A}$ に対応する連立 1 次方程式は次のようになっている。

$$(E)\left\{\begin{array}{ccl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \text{ ——— ①} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \text{ ——— ②} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \text{ ——— ⓜ} \end{array}\right.$$

行基本変形 (1) を $\widetilde{A}$ の i 行に j 行の a 倍を加える操作とする。$\widetilde{A'}$ に対応する連立 1 次方程式は i 番目の式を除くと上と全く同じである。i 番目の式は ⓘ $+ a \times$ ⓙ になっている。$\boldsymbol{x} \in W(A, \boldsymbol{b})$ とすると，x は上の①からⓜを満たしている。よって ⓘ $+ a \times$ ⓙ も満たすので $\boldsymbol{x} \in W(A', \boldsymbol{b}')$ となる。逆に $\boldsymbol{x} \in W(A', \boldsymbol{b})$ とすると，$\boldsymbol{x}$ はⓘを除く①からⓜまでと，ⓘ $+ a \times$ ⓙ を満たしている。ⓘ $+ a \times$ ⓙ にⓙの $-a$ を加えることによりⓘも満たすことがわかるので，$\boldsymbol{x} \in W(A, \boldsymbol{b})$ となる。

行基本変形 (2) を $\widetilde{A}$ の i 行を a $(a \neq 0)$ 倍する操作とする。$\widetilde{A'}$ に対応する連立 1 次方程式は i 番目の式を除くと上と全く同じであり，i 番目の式は $a \times$ ⓘ になっている。$\boldsymbol{x} \in W(A, \boldsymbol{b})$ とすると，x は上の①からⓜを満たしている。よって $a \times$ ⓘ も満たすので $\boldsymbol{x} \in W(A', \boldsymbol{b}')$ となる。逆に $\boldsymbol{x} \in W(A', \boldsymbol{b})$ とすると，$\boldsymbol{x}$ はⓘを除く①からⓜまでと，$a \times$ ⓘ を満たしている。$a \times$ ⓙ を $\dfrac{1}{a}$ 倍することによりⓘも満たすことがわかるので，$\boldsymbol{x} \in W(A, \boldsymbol{b})$ となる。

行基本変形 (3) を $\widetilde{A}$ の i 行と j 行を入れ換える操作とする。$\widetilde{A'}$ に対応する連立 1 次方程式は i 番目と j 番目の式を除くと上と全く同じであり，i 番目の式はⓙ，j 番目の式はⓘになっている。式の順序が異なるだけなので，$W(A, \boldsymbol{b}) = W(A', \boldsymbol{b}')$ が成立している。

次に列基本変形を考える。連立 1 次方程式をベクトル表示すると (E) は

$$(E_v) \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける。ただし今 $i < j$ としている。$i > j$ の場合も同様にできるので，ここでは $i < j$ として証明する。

列基本変形 (1) を $\widetilde{A}$ の i 列に j 列の a 倍を加える操作とする。$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in W(A', \boldsymbol{b})$ とす

ると，$\boldsymbol{x}'$ は

$$(E_v') \qquad x_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i'(\boldsymbol{a}_i + a\boldsymbol{a}_j) + \cdots + x_j'\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n'\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

を満たしている。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W(A, \boldsymbol{b})$ に対し $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j - ax_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} & x_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i'(\boldsymbol{a}_i + a\boldsymbol{a}_j) + \cdots + x_j'\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n'\boldsymbol{a}_n \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i(\boldsymbol{a}_i + a\boldsymbol{a}_j) + \cdots + (x_j - ax_i)\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n + ax_i\boldsymbol{a}_j - ax_i\boldsymbol{a}_j \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となるので $\boldsymbol{x}' \in W(A', \boldsymbol{b})$ となる。この $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ への対応は $W(A, \boldsymbol{b})$ から $W(A', \boldsymbol{b})$ への一対一対応を与える。

列基本変形 (2) を $\widetilde{A}$ の i 列を a 倍する操作とする。$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in W(A', \boldsymbol{b})$ とすると，$\boldsymbol{x}'$ は

$$(E_v') \qquad x_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i'(a\boldsymbol{a}_i) + \cdots + x_j'\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n'\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

を満たしている。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W(A, \boldsymbol{b})$ に対し $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{a}x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} & x_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i'(a\boldsymbol{a}_i) + \cdots + x_j'\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n'\boldsymbol{a}_n \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \frac{1}{a}x_i(a\boldsymbol{a}_i) + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となるので $\boldsymbol{x}' \in W(A', \boldsymbol{b})$ となる。この $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ への対応は $W(A, \boldsymbol{b})$ から $W(A', \boldsymbol{b})$ への一対一対応を与える。

列基本変形 (3) を $\widetilde{A}$ の i 列と j 列を入れ換える操作とする。$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in W(A', \boldsymbol{b})$ とする

と，$\boldsymbol{x}'$ は

$$(E_v') \qquad x_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i'\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_j'\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_n'\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

を満たしている。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W(A, \boldsymbol{b})$ に対し $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} & x_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i'\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_j'\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_n'\boldsymbol{a}_n \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\ = \ & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となるので $\boldsymbol{x}' \in W(A', \boldsymbol{b})$ となる。この $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ への対応は $W(A, \boldsymbol{b})$ から $W(A', \boldsymbol{b})$ への一対一対応を与える。