線形解析 II 問題解説 #3

河野

演習問題 ***3.6**　補題 3.7 の証明を参考にして $\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$ を示せ。

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^* \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a'}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a'}_m^* \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ が 1 次独立としても一般性を失わない。

最初に列基本変形の場合を示す。$A_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \boldsymbol{a}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_r^* \end{pmatrix}$, $A'_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a'}_1^* \\ \boldsymbol{a'}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a'}_r^* \end{pmatrix}$ とおくと A_r に列基本変形を行った結果が A'_r となる。$\boldsymbol{x}^* = (\, x_1 \, \ldots \, x_r)$, $\boldsymbol{0}^* = (\, 0 \, \ldots \, 0)$ とおき $W^*(A) = \{\, \boldsymbol{x}^* \mid \ x_1 a_1^* + \cdots + x_r a_r^* = \boldsymbol{0}^* \,\}$ とする。$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ が１次独立であることと $W^*(A) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ であることは同値であることを注意しておく。今 $\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ は１次独立なので $W^*(A) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ が成立している。列基本変形を行っても $W^*(A)$ は変化しないので，$W^*(A'_r) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ が成立している。よって $\boldsymbol{a'}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_r^*$ は１次独立である。以上により $\mathrm{rank}_3(A) \leqq \mathrm{rank}_3(A')$ が成立する。列基本変形の逆操作は列基本変形であることに注意して，A と A' の役割を入れ換えれると $\mathrm{rank}_3(A') \leqq \mathrm{rank}_3(A)$ が成立することが分かる。よって $\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$ が成立する。

次に行基本変形について示す。最初に行基本変形の 3 番目の変形の場合に示す。3 番目の変形は行の入れ換えなのでベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n^*$ と $\boldsymbol{a'}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_n^*$ は順序が一部異なるだけで集合としては等しい。よって１次独立なベクトルの最大個数は等しい。

2 番目の変形のとき，i 行が $\lambda\,(\neq 0)$ 倍されたとする。このとき $W^*(A_r) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ なので $W^*(A'_r) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ となり，１次独立性は変わらない。

1 番目の変形のとき，変形を j 行の α 倍が i 行に加えるものとする。即ち $\boldsymbol{a'}_i^* = \boldsymbol{a}_i^* + \alpha \boldsymbol{a}_j^*$ であり，$k \neq i$ のとき $\boldsymbol{a'}_k^* = \boldsymbol{a}_k^*$ となっている。$i > r$ のとき最初の r 個のベクトルは変化しないので $\boldsymbol{a'}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_n^*$ も 1 次独立である。よって $i \leqq r$ とする。$j \leqq r$ のときは $W^*(A_r)$ と $W^*(A'_r)$ は一対一に対応するので，$W^*(A_r) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ より $W^*(A'_r) = \{\boldsymbol{0}^*\}$ となり，$\boldsymbol{a'}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_n^*$ は 1 次独立になる。よって $j > r$ とする。ベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}^*, \boldsymbol{a}_{i+1}^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*, \boldsymbol{a}_j^*$$

が 1 次独立な場合とそうでない場合に分ける。１次独立な場合は $\mathrm{rank}_3(A') \geqq r$ となるので $\mathrm{rank}_3(A) \leqq \mathrm{rank}_3(A')$ となる。１次独立でない場合は $\boldsymbol{a'}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_i^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_r^*$ が１次独立であることを示す。$\boldsymbol{a}_j^*$ は $\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}^*, \boldsymbol{a}_{i+1}^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ の線型結合で書けるので，$\boldsymbol{a}_j^* = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \beta_k \boldsymbol{a}_k^*$ と表しておく。ただし $\beta_i = 0$ である。

$$c_1 \boldsymbol{a'}_1^* + \cdots + c_i \boldsymbol{a'}_i^* + \cdots + c_r \boldsymbol{a'}_r^* = \boldsymbol{0}^*$$

が成立しているとする。このとき式を変形すると

$$(c_1 + c_i\beta_1)\boldsymbol{a}_1^* + \cdots + (c_{i-1} + c_i\beta_{i-1})\boldsymbol{a}_{i-1}^* + c_i \boldsymbol{a}_i + (c_{i+1} + c_i\beta_{i+1})\boldsymbol{a}_{i+1}^* + (c_r + c_i\beta_r)\boldsymbol{a}_r^* = \boldsymbol{0}^*$$

となる。$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ の 1 次独立性より $c_i = 0$ となり，$k \neq i$ に対しても $c_k = 0$ が成立する。よって $\boldsymbol{a'}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a'}_r^*$ は 1 次独立である。以上により $\mathrm{rank}_3(A) \leqq \mathrm{rank}_3(A')$ が成立する。A と A' の役割を入れ替えることにより $\mathrm{rank}_3(A') \leqq \mathrm{rank}_3(A)$ が得られるので証明は終わる。

演習問題 3.7　補題 3.7 から定理 3.5 を示せ。

$\mathrm{rank}_4(A) = \mathrm{rank}_2(A)$ はすでに示してあるので，$\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A)$ を示す。k 回基本変形を行って標準型になる n 行列の集合を $L(k)$ と書く。$L(k)$ に属する行列に対して定理 3.5 が正しいことを数学的帰納法で証明する。これを証明すると任意の行列 A はある $L(k)$ に属しているので，定理 3.5 が証明される。

最初に $A \in L(0)$ とする。このとき A は標準型なので $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A)$ が成立している。よって $r = 0$ のときは成立する。

次に $L(k)$ に属する行列に関しては定理が正しいとする。$A \in L(k+1)$ とする。このとき A に基本変形を 1 回行って得られる行列 B で $B \in L(k)$ となるものが存在する。このとき補題 3.7 より $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_2(B)$，$\mathrm{rank}_3(A) = \mathrm{rank}_3(B)$ が成立している。また帰納法の仮定より $\mathrm{rank}_1(B) = \mathrm{rank}_2(B) = \mathrm{rank}_3(B)$ が成立している。B は A に基本変形を行ったものなので $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_1(B)$ が成立している。以上より $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A)$ が成立する。よって $k+1$ でも成立している。

演習問題 3.8　次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\,\text{行}) \to (4\,\text{行}) - (3\,\text{行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\,\text{行}) \to (3\,\text{行}) - (2\,\text{行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\,\text{行}) \to (2\,\text{行}) - (1\,\text{行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4\,\text{行}) \to (4\,\text{行}) - (2\,\text{行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\,\text{行}) \to (3\,\text{行}) - (2\,\text{行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) \to \frac{1}{4}\times(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行})\longleftrightarrow(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって階数は 2 である。

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行})\longleftrightarrow(4\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行})\longleftrightarrow(3\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ よって階数は 4 である。

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - 2\times(3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって階数は 2 である。

(4) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - 2\times(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行})\longleftrightarrow(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to \frac{1}{2}\times(2\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

この問題は場合分けが必要になる。$a = 2$ かつ $b = 1$ のときは階数は 2 である。それ以外は階数は 3 になる。ここでは $a \neq 2$ の場合を示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to \frac{1}{a-2} \times (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (b-1) \times (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 列}) \longleftrightarrow (5\text{ 列})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b \neq 1$ の場合は各自計算すること。