線形解析 II 問題解説 #4

河野

演習問題 *__3.9__ A を (s_1,t_1) 行列，B を (s_1,t_2) 行列，C を (s_2,t_1) 行列，D を (s_2,t_2) 行列とする。$\boldsymbol{x}_1$ を t_1 項数ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ を t_2 項数ベクトルとする。$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ とするとき $M\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1+B\boldsymbol{x}_2 \\ C\boldsymbol{x}_1+D\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ が成立することを示せ。

$M=(m_{ij})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$,$C=(c_{ij})$,$D=(d_{ij})$ とおく。また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t_1+t_2} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t_1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t_2} \end{pmatrix}$ とおく。行列 M を t_1 列と t_1+1 列の間および s_1 行と s_1+1 行の間で分割してできる行列が A,B,C,D なので

$$\begin{array}{rcll} a_{ij} &=& m_{i\,j} & (1\leqq i\leqq s_1, 1\leqq j\leqq t_1) \\ b_{ij} &=& m_{i\,t_1+j} & (1\leqq i\leqq s_1, 1\leqq j\leqq t_2) \\ c_{ij} &=& m_{s_1+i\,j} & (1\leqq i\leqq s_2, 1\leqq j\leqq t_1) \\ d_{ij} &=& m_{s_1+i\,t_1+j} & (1\leqq i\leqq s_2, 1\leqq j\leqq t_2) \end{array}$$

が成立する。またベクトルに対しても

$$\begin{array}{rcll} x_{1j} &=& x_j & (1\leqq j\leqq t_1) \\ x_{2j} &=& x_{t_1+j} & (1\leqq j\leqq t_2) \end{array}$$

が成立する。$A\boldsymbol{x}_1+B\boldsymbol{x}_2$ の i 成分は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{t_1} a_{ik}x_{1k}+\sum_{k=1}^{t_2} b_{ik}x_{2k} &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{ik}x_k+\sum_{k=1}^{t_2} m_{it_1+k}x_{t_1+k} \\ &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{ik}x_k+\sum_{k=t_1+1}^{t_1+t_2} m_{ik}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{t_1+t_2} m_{ik}x_k \end{aligned}$$

となる。これは $M\boldsymbol{x}$ の i 成分と等しい。また $C\boldsymbol{x}_1 + D\boldsymbol{x}_2$ の i 成分は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{t_1} c_{ik}x_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} d_{ik}x_{2k} &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{s_1+i\,k}x_k + \sum_{k=1}^{t_2} m_{s_1+i\,t_1+k}x_{t_1+k} \\ &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{s_1+i\,k}x_k + \sum_{k=t_1+1}^{t_1+t_2} m_{s_1+i\,k}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{t_1+t_2} m_{s_1+i\,k}x_k\end{aligned}$$

となる。これは $M\boldsymbol{x}$ の s_1+i 成分と等しい。よって $M\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{x}_2 \\ C\boldsymbol{x}_1 + D\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ が成立する。

演習問題 3.10　次の連立方程式が解を持つかどうか，定理 3.9 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ (この問題は演習問題 3.1 と同じ問題)。

(1) $\begin{cases} x+y+z+w = 1 \\ x+y+z+w = a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+z+u+v = 1 \\ x+2y+3z+4v = 0 \\ 2x+3y+4z+5v = a \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y+2z+u+2v+w = 1 \\ x+2y+z+2u+v+2w = 0 \\ x-y+z-u+v-w = a \\ x+y+z+u+v+w = b \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 1x+1y+1z+1u+1v+2w = 1 \\ 1x+2y+2z+2u+3v+3w = 2 \\ 1x+1y+2z+3u+2v+3w = 2 \\ 2x+2y+3z+4u+3v+5w = a+3 \\ 3x+2y+3z+4u+3v+5w = b+3 \end{cases}$

これは前期に解説しているので，それを見て下さい。ただし，階数を導入しているので，以前より見やすいかもしれない

演習問題 3.11　次の行列 A および $\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{b})$ の階数を求めよ。ただし

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

とする。また $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつかどうか調べよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。(この問題ができれば方程式論は卒業)

変数の指定を忘れました。ここでは X,Y,Z,U,V,W としておきます。(小文字にしようと思ったがすでに u を使用していたので) 行列の基本変形はできるようになっていると思われるので，変形した結果のみを記す。列基本変形を行うと変数名の変化を記憶しておかなくてはならないので，ここでは行基本変形のみ行う。結果の行列は準標準型になるとは限らないが，方程式が見やすい形までは変形する。

(1) $c=0$ かつ $b=0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & s-r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p-r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p+(1-a)(p-r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t=0$，$u=0$，$q-p+(1-a)(p-r)=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s-r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p-r \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(2) $c=0$ かつ $b=1$ かつ $a=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & s-p-\frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t=0$，$r-p=0$，$q-p=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ s-r-\frac{b}{u} \\ 0 \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + W\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(3) $c=0$ かつ $b\neq 0$ かつ $b\neq 1$ のとき

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-\dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & s-p-\dfrac{u}{b}+\dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p+\dfrac{(1-a)(r-p)}{b-1} \end{array}\right)$$

解を持つ必要十分条件は $t=0,\ q-p+\dfrac{(1-a)(r-p)}{b-1}=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-\dfrac{r-p}{b-1} \\ s-p-\dfrac{b}{u}+\dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 \\ \dfrac{u}{b} \\ 0 \\ \dfrac{r-p}{b-1} \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(4) $c=0$ かつ $b=1$ かつ $a\neq 1$ のとき

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-\dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & s-p-\dfrac{u}{b}+\dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+\dfrac{(1-b)(q-p)}{a-1} \end{array}\right)$$

解を持つ必要十分条件は $t=0,\ r-p+\dfrac{(1-b)(q-p)}{a-1}=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-\dfrac{q-p}{a-1} \\ s-p-\dfrac{b}{u}+\dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 \\ \dfrac{u}{b} \\ 0 \\ \dfrac{q-p}{a-1} \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(5) $c\neq 0$ かつ $b=0$ のとき

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{c} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & c(r-p)+s-r-\frac{t}{c} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p-r \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-1)(r-p) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u
\end{pmatrix}
$$

解を持つ必要十分条件は $u=0$, $(a-1)(r-p)=0$ である。このとき解は

$$
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} r \\ \frac{t}{c} \\ c(r-p)+s-r-\frac{t}{c} \\ 0 \\ 0 \\ p-r \end{pmatrix}
+U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる。

(6) $c \neq 0$ かつ $b=1$ かつ $a=1$ のとき

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{c} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & c-1 & -\frac{t-c(s-p)}{c}-\frac{u}{b} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{u}{b} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p
\end{pmatrix}
$$

解を持つ必要十分条件は $r-p=0$, $q-p=0$ である。このとき解は

$$
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} p \\ \frac{t}{c} \\ -\frac{t-c(s-p)}{c}-\frac{u}{b} \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
+W\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

となる。

(7) $c \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $b \neq 1$ のとき

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-\dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{t}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{t-c(s-p)}{c}+\dfrac{(1-c)(r-p)}{b-1}-\dfrac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p+\dfrac{(1-a)(r-p)}{b-1} \end{array}\right)$$

解を持つ必要十分条件は $q-p+\dfrac{(1-a)(r-p)}{b-1}=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-\dfrac{r-p}{b-1} \\ \dfrac{t}{c} \\ -\dfrac{t-c(s-p)}{c}+\dfrac{(1-c)(r-p)}{b-1}-\dfrac{u}{b} \\ \dfrac{u}{b} \\ 0 \\ \dfrac{r-p}{b-1} \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(8) $c\neq 0$ かつ $b=1$ かつ $a\neq 1$ のとき

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-\dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{t}{c}+(1-c)(r-p) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{t}{c}-\dfrac{u}{b}+p-s+(1-c)(r-p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{q-p}{a-1} \end{array}\right)$$

解を持つ必要十分条件は $t=0,\ r-p+\dfrac{(1-b)(q-p)}{a-1}=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-\dfrac{q-p}{a-1} \\ \dfrac{t}{c}+(1-c)(r-p) \\ -\dfrac{t}{c}-\dfrac{u}{b}+p-s+(1-c)(r-p) \\ \dfrac{u}{b} \\ 0 \\ \dfrac{q-p}{a-1} \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 3.12　命題 3.14 および命題 3.15 を証明せよ。

ここの議論は $\sum$ を用いてきちんと計算しているのでなれていないと難しいかもしれない。$n = 3, 4$ の場合を計算してみると，議論の参考になるかもしれない。

最初は命題 3.14 で逆行列を計算する。$P_n(k,\ell)P_n(k,\ell)$ を計算する。この積の行列 (i,j) 成分を $\widetilde{p}_{ij}$ とすると

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} p_{is}p_{sj} \\ &= \sum_{s\neq k,\ell} p_{is}p_{sj} + p_{ik}p_{kj} + p_{i\ell}p_{\ell j}\end{aligned}$$

である。ただし $\displaystyle\sum_{s\neq k,\ell}$ は $s=1$ から $s=n$ まで和をとるとき $s=k$ と $s=\ell$ を除いて和をとることを意味する。最初に $i=k$ の場合を計算する。このとき和は $\displaystyle\sum_{s\neq k,\ell} p_{ks}p_{sj} + p_{kk}p_{kj} + p_{k\ell}p_{\ell j} = \sum_{s\neq k,\ell} p_{ks}p_{sj} + 0\times p_{kj} + 1\times p_{\ell j} = \sum_{s\neq k,\ell} p_{ks}p_{sj} + p_{\ell j}$ となる。p_{ks} は $s\neq \ell$ のとき 0 なので $\widetilde{p}_{ij} = p_{\ell j}$ となる。よって $j=k$ のときのみ $\widetilde{p}_{ij}=1$ でそれ以外は 0 である。次に $i=\ell$ の場合，この場合は $i=k$ の場合と同様にできる。和は $\displaystyle\sum_{s\neq k,\ell} p_{\ell s}p_{sj} + p_{\ell k}p_{kj} + p_{\ell\ell}p_{\ell j} = \sum_{s\neq k,\ell} p_{\ell s}p_{sj} + 1\times p_{kj} + 0\times p_{\ell j} = \sum_{s\neq k,\ell} p_{ks}p_{sj} + p_{kj}$ となる。p_{ks} は $s\neq k$ のとき 0 なので $\widetilde{p}_{ij} = p_{kj}$ となる。よって $j=\ell$ のときのみ $\widetilde{p}_{ij}=1$ でそれ以外は 0 である。最後に $i\neq k$ かつ $i\neq \ell$ の場合を考える。このときは $p_{ik}=0$ かつ $p_{i\ell}=0$ なので $\displaystyle\widetilde{p}_{ij} = \sum_{s\neq k,\ell} p_{is}p_{sj}$ となる。p_{is} は $s=i$ のときのみ 1 でそれ以外は 0 となる。よって $\widetilde{p}_{ij} = p_{ii}p_{ij} = p_{ij}$ である。このときも $i=j$ のとき 1 それ以外は 0 である。いずれの場合も $i\neq j$ のとき $\widetilde{p}_{ij}=0$，$i=j$ のとき $\widetilde{p}_{ij}=1$ となる。よって $\widetilde{p}_{ij}=\delta_{ij}$(クロネッカーのデルタ) なので $P_n(k,\ell)P_n(k,\ell)=E_n$ となる。よって $P_n(k,\ell)^{-1} = P_n(k,\ell)$ である。

$Q_n(k;\lambda)Q_n\left(k;\dfrac{1}{\lambda}\right)$ を計算する。この積の行列の (i,j) 成分を $\widetilde{q}_{ij}$ とする。$Q_n(k;\lambda)$ の (i,j) 成分はプリント通り q_{ij}，$Q_n\left(k;\dfrac{1}{\lambda}\right)$ の (i,j) 成分を q'_{ij} とする。すなわち $q'_{kk}=\dfrac{1}{\lambda}$，$q'_{ii}=1\ (i\neq k)$，$q'_{ij}=0$ (その他の場合) とする。

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} q_{is}q'_{sj} \\ &= \sum_{s\neq k} q_{is}q'_{sj} + q_{ik}q'_{kj}\end{aligned}$$

となっている。ただし $\displaystyle\sum_{s\neq k}$ は $s=1$ から $s=n$ まで和をとるとき $s=k$ を除いて和をとることを意味する。$i=k$ のとき $s\neq i(=k)$ なので $q_{is}=0$ である。このときは $\widetilde{q}_{kj} = q_{kk}q'_{kj} = \lambda q'_{kj}$ となる。よって $j=k$ のときは $\widetilde{q}_{kj} = \lambda\dfrac{1}{\lambda=}1$ それ以外は $\widetilde{q}_{kj}=0$ となる。$i\neq k$ のとき $q_{ik}=0$ なので $\displaystyle\widetilde{q}_{ij} = \sum_{s\neq k} q_{is}q'_{sj}$ となるが q_{is} は $s=i$ のときのみ 0 ではないので $\widetilde{q}_{ij} = q_{ii}q'_{ij}$ となる。よって

$i=j$ のとき $\widetilde{q}_{ij}=\lambda\dfrac{1}{\lambda}=1$，$i\neq j$ のとき $\widetilde{q}_{ij}=0$ となる。いずれの場合も $\widetilde{q}_{ij}=\delta_{ij}$ となるので $Q_n(k;\lambda)Q_n\left(k;\dfrac{1}{\lambda}\right)=E_n$ となる。よって $Q_n(k;\lambda)^{-1}=Q_n\left(k;\dfrac{1}{\lambda}\right)$ である。

$R_n(k,\ell;\alpha)R_n(k,\ell;-\alpha)$ を計算する。この積の行列の (i,j) 成分を $\widetilde{r}_ij$ とする。$R_n(k,\ell;\alpha)$ の (i,j) 成分はプリント通り r_{ij}，$R_n(k,\ell;\alpha)$ の (i,j) 成分を r'_{ij} とする。すなわち $r'_{k\ell}=-\alpha$，$r'_{ii}=1$，$r'_{ij}=0$ (その他の場合) とする。

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} r_{is}r'_{sj}\\ &= \sum_{s\neq k} r_{is}r'_{sj}+r_{ik}r'_{kj}\end{aligned}$$

となっている。最初に $i=k$ の場合を考える。このとき $s\neq i(=k)$ なので $\widetilde{r}_{kj}=\sum_{s\neq k} r_{ks}r'_{sj}+r_{kk}r'_{kj}=r_{k\ell}r'_{\ell j}+r'_{kj}=\alpha r'_{\ell j}+r'_{kj}$ である。$j=k$ のとき $\widetilde{r}_{kk}=\alpha r'_{\ell k}+r'_{kk}=1$ であり，$j=\ell$ のとき $\widetilde{q}_{k\ell}=\alpha r'_{\ell\ell}+r'_{k\ell}=\alpha-\alpha=0$ であり，$j\neq k,\ell$ のとき $\widetilde{r}_{kj}=0$ となる。次に $i=\ell$ の場合を考える。このとき $\widetilde{r}_{\ell j}=\sum_{s\neq k} r_{\ell s}r'_{sj}+r_{\ell k}r'_{kj}=r_{\ell\ell}r'_{\ell j}=r'_{\ell j}$ である。$j=\ell$ のときは 1，$j\neq\ell$ のときは 0 である。最後に $i\neq k,\ell$ の場合を考える。$\widetilde{r}_{ij}=\sum_{s\neq k} r_{is}r'_{sj}=r_{ii}r'_{ij}=r'_{ij}$ なので，$i=j$ のとき 1，$i\neq j$ のとき 0 になる。いずれの場合も $\widetilde{r}_{ij}=\delta_{ij}$ となり。$R_n(k,\ell;\alpha)R_n(k,\ell;-\alpha)=E_n$ となる。よって $R_n(k,\ell;\alpha)^{-1}=R_n(k,\ell;-\alpha)$ である。

次に転置行列を考える。$P_n(k,\ell)$ および $Q_n(k;\lambda)$ は $p_{ij}=p_{ji}$ および $q_{ij}=q_{ji}$ が成立しているので $P_n(k,\ell)^T=P_n(k,\ell)$，$Q_n(k;\lambda)^T=Q_n(k;\lambda)$ が成立する。r_{ij} は $(i,j)=(k,\ell),(\ell,k)$ 以外は $r_{ij}=r_{ji}$ が成立している。$R_n(k,\ell;\alpha)$ の (k,ℓ) 成分は α，(ℓ,k) 成分は 0 であり，$R_n(\ell,k;\alpha)$ の (ℓ,k) 成分は α，$(k.\ell)$ 成分は 0 である。よって $R_n(k,\ell;\alpha)^T=R_n(\ell,k;\alpha)$ となっている。

次は命題 3.15 を示す。前命題と同様に $\sum$ を用いているので，$n=3,4$ で計算すると，議論の参考になるかもしれない。

$A=(a_{ij})$，$A'=(a'_{ij})$ とする。

(1)　$A'=P_n(k,\ell)A$ のとき　$a'_{ij}=\sum_{s=1}^{n} p_{is}a_{sj}$ である。$i\neq k$ かつ $i\neq\ell$ については $p_{is}=\delta_{is}$ なので

$$\begin{aligned}a'_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} p_{is}a_{sj}\\ &= \sum_{s=1}^{n} \delta_{is}a_{sj}\\ &= \delta_{ii}a_{ij}=a_{ij}\end{aligned}$$

となり A と A' の i 行は一致している。$i=k$ のとき

$$\begin{aligned}a'_{kj} &= \sum_{s=1}^{n} p_{ks}a_{sj}\\ &= p_{k\ell}a_{\ell j}=a_{\ell j}\end{aligned}$$

となるので A' の k 行は A の ℓ 行と等しい。$i=\ell$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n} p_{\ell s} a_{sj} \\ &= p_{\ell k} a_{kj} = a_{kj} \end{aligned}$$

となるので A' の ℓ 行は A の k 行と等しい。以上により A' は A の k 行と ℓ 行を入れ換えたものになっている。

(2) $A' = AP_m(k,\ell)$ **のとき** $\quad a'_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} p_{sj}$ である。$j \neq k$ かつ $j \neq \ell$ については $p_{sj} = \delta_{sj}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is} p_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{m} a_{is} \delta_{sj} \\ &= a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の j 列は一致している。$j=k$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is} p_{sk} \\ &= a_{i\ell} p_{\ell k} = a_{i\ell} \end{aligned}$$

となるので A' の k 列は A の ℓ 列と等しい。$j=\ell$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{i\ell} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is} p_{s\ell} \\ &= a_{ik} p_{k\ell} = a_{ik} \end{aligned}$$

となるので A' の ℓ 列は A の k 列と等しい。以上により A' は A の k 列と ℓ 列を入れ換えたものになっている。

(3) $A' = Q_n(k;\lambda)A \quad a'_{ij} = \sum_{s=1}^{n} q_{is} a_{sj}$ である。$i \neq k$ については $p_{is} = \delta_{is}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} q_{is} a_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \delta_{is} a_{sj} \\ &= \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の i 行は一致している。$i=k$ のとき $q_{ks} = \lambda\delta_{ks}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{kj} &= \sum_{s=1}^{n} q_{ks} a_{sj} \\ &= \lambda\delta_{kk} a_{kj} = \lambda a_{kj} \end{aligned}$$

となるので A' の k 行は A の k 行の λ 倍になっている。

(4) $A' = AQ_m(k;\lambda)$ $\quad a'_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}q_{sj}$ である。$j \neq k$ については $p_{sj} = \delta_{sj}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}q_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}\delta_{sj} \\ &= a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の j 列は一致している。$j = k$ のとき $q_{sk} = \lambda\delta_{sk}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}q_{sk} \\ &= a_{ik}\lambda\delta_{kk} = \lambda a_{ik} \end{aligned}$$

となるので A' の k 列は A の k 列の λ 倍になっている。

(5) $A' = R_n(l,\ell;\alpha)A$ $\quad a'_{ij} = \sum_{s=1}^{n} r_{is}a_{sj}$ である。$i \neq k$ については $r_{is} = \delta_{is}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} r_{is}a_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \delta_{is}a_{sj} \\ &= \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の i 行は一致している。$i = k$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{kj} &= \sum_{s=1}^{n} r_{ks}a_{sj} \\ &= r_{kk}a_{kj} + r_{k\ell}a_{\ell j} = a_{kj} + \alpha a_{\ell j} \end{aligned}$$

となるので A' の k 行は A の k 行に ℓ 行の α 倍を加えたものになっている。

(6) $A' = AR_m(k,\ell;\alpha)$ $\quad a'_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}r_{sj}$ である。$j \neq k$ については $r_{sj} = \delta_{sj}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}r_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}\delta_{sj} \\ &= a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の j 列は一致している。$j = \ell$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}r_{s\ell} \\ &= a_{ik}r_{k\ell} + a_{i\ell}r_{\ell\ell} = \alpha a_{ik} + a_{i\ell} \end{aligned}$$

となるので A' の ℓ 列は A の ℓ 列に k 列の λ 倍を加えたものになっている。

演習問題 3.13　次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

計算方法は理解していると思うので結果のみを記す。

(1) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$