線形解析 II 問題解説 #5

河野

演習問題 4.1　A が逆行列をもつ事と f_A が逆写像をもつ事が同値である事を示せ。

少し用語が混乱してしまいました。ここで f_A と書いたのは，講義で T_A と書いたもので，$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})$ で定義されるものです。ここでは T_A という記法を採用します。

T_A (f_A) の性質について確認しておく。

(1) $T_{AB} = T_A \circ T_B$

(2) E を単位行列，id を恒等写像とすると，$T_E = id$ である。

(3) 写像 f，g について $f \circ g = id$ かつ $g \circ f = id$ が成立すると，$g = f^{-1}$ である。

(4) $T_A = T_B$ なら $A = B$ が成立する。

A が逆行列をもつとき，逆行列を B とする。このとき $AB = E$ かつ $BA = E$ が成立している。$T_A \circ T_B = T_{AB} = T_E = id$ かつ $T_B \circ T_A = T_{BA} = T_E = id$ が成立している。よって $T_B = T_A^{-1}$ となる。よって T_A が逆写像をもつ。

逆に T_A が逆写像 g をもつとき，$T_A \circ g = id$ かつ $g \circ T_A = id$ が成立している。線型写像の逆写像も線型写像なので g は線型写像である。このとき行列 B が存在して $g = T_B$ となる。よって $T_E = id = T_A \circ g = T_A \circ T_B = T_{AB}$，$T_E = id = g \circ T_A = T_B \circ T_A = T_{BA}$ より，$AB = E$ かつ $BA = E$ が成立する。B は A の逆行列である。

演習問題 *4.2　命題 4.4 及び 4.5 を証明せよ。

行列式をすでに学んでいるので行列式を用いて外積を次の様に表しておく。$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とするとき

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & x_1 & y_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & x_2 & y_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

となる。等式の成立は行列式を 1 列で展開すればよい。命題 4.4 の (1),(2) は行列式の線型性，交代性から出てくる。(3) は定義どおり計算すればよい。1 つだけ計算しておく。

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}_2 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_3$$

$P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が (1),(2),(3) の性質を持つとき $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を示す。証明は講義でふれた補題 4.15 の証明とほとんど同じである。外積の交代性から $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が従う。同様に $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となる。よって $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}$ となる。これと (3) から任意の i, j (ただし i, j は 1,2,3 にいずれか) に対

し $P(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$ がわかる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) &= P(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_i) \\
&= P(x_1\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i) + P(x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_i) \\
&= P(x_1\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i) + P(x_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_i) + P(x_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_i) \\
&= x_1 P(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i) + x_2 P(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_i) + x_3 P(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_i) \\
&= x_1\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_i + x_2\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_i + x_3\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_i \\
&= x_1\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_i + (x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_i \\
&= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_i \\
&= \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= P(\boldsymbol{x}, y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{y}_2 + y_3\boldsymbol{y}_3) \\
&= P(\boldsymbol{x}, y_1\boldsymbol{e}_1) + P(\boldsymbol{x}, y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= P(\boldsymbol{x}, y_1\boldsymbol{e}_1) + P(\boldsymbol{x}, y_2\boldsymbol{e}_2) + P(\boldsymbol{x}, y_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= y_1 P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) + y_2 P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2) + y_3 P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_3) \\
&= y_1\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3 \\
&= y_1\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}(y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= \boldsymbol{x}(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

となり等号が示される。

$|(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})| =$(平行 6 面体の体積) を示せば，右手系・左手系の定義から命題 4.5 がしたがう。$|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}| =$($x$ と y が張る平行 4 辺形の面積) が成立している。$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ と直交しているので $\boldsymbol{z}$ とのなす角を θ とすると，平行 6 面体の高さは $|\boldsymbol{z}|\cos\theta$ または $|\boldsymbol{z}|\cos(\pi + \theta)$ となる。よって

$$\begin{aligned}
(\text{平行 6 面体の体積}) &= (x \text{ と } y \text{ が張る平行 4 辺形の面積}) \cdot (\text{高さ}) \\
&= \pm|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}|\cos\theta \\
&= |(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})|
\end{aligned}$$

となる。ただし「$\pm$」は全体が正になるように選ぶものとする。

演習問題 4.3　命題 4.7 を証明せよ。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とおく。$\widetilde{A}A$ の $(1,1)$–成分は

$$(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})x_1 + (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})x_2 + (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})x_3$$

なので線型性より $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_3=(x_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(x_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(x_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=((x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\det(A)$ となる。$\widetilde{A}A$ の $(1,2)$–成分は

$$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_3$$

なので線型性より $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_3=(y_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(y_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(y_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=((y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0$ となる。ほかの成分も同様に計算できて命題が示される。

演習問題 ***4.4**　　定理 4.8 を証明せよ。

$A\widetilde{A}=\det(A)E$ の証明は命題 4.7 より少し難しい。$A\widetilde{A}$ の $(1,1)$–成分は

$$x_1(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+y_1(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z})+z_1(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)$$

である。これが $\det(A)$ になることを示せばよい。$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}$ が直交していること，および直交するベクトルの内積は 0 であることを使う。$\boldsymbol{z}'=z_2\boldsymbol{e}_2+z_3\boldsymbol{e}_3$ とおくと $\boldsymbol{z}=z_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{z}'$ なので

$$\begin{aligned}\det(A) &= (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ &= (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},z_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{z}')\\ &= z_1(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}')\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{x}'=x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{y}'=y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3$ とおくと $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{y}'$ なので

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}') &= ((x_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}')\\ &= x_1(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}')+(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}')\end{aligned}$$

となる。$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)=0$ なので

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},z_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{z}')\\ &= z_1(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)+(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}')\\ &= (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}')\end{aligned}$$

が成立している。また

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}') &= (\boldsymbol{x}'\times(y_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{y}'),\boldsymbol{z}')\\ &= y_1(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z}')+(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')\end{aligned}$$

が成立する。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z}) &= ((x_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z})\\ &= x_1(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z})\\ &= (\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{e}_1,z_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{z}')\\ &= (\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z}')\\ &= (\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z}')\end{aligned}$$

と $(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')=0$ (この事実は直接計算してもでてくるが，これらのベクトルがすべて $\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}_3$ が張る平面に含まれていることからでてくる) とをもとの式に代入すると求める式が得られる。

$A\widetilde{A}$ の $(2,1)$–成分は

$$x_2(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+y_2(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z})+z_2(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)$$

である。線型性および交代性を用いて計算を実行していくと 0 になることがわかる。他の成分も同様にできる。

演習問題 4.5　命題 4.9 を証明せよ。

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'=\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}) &= \det\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ c+c' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)\\
&= (a+a')d-b(c+c')\\
&= ad-bc+a'd-bc'\\
&= \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\det(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

(1) の他の式も同様にできる。

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) &= \det\left(\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right)\\
&= bc-ad=-(ad-bc)\\
&= -\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

$$\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=1\cdot 1-0\cdot 0=1$$

演習問題 4.6　$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である事を示せ。この事から (1), (2), (3) を満たせば，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が分かる。

(2) より $D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ が分かる。$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}_1+c\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2$ となる。

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= D(a\boldsymbol{e}_1+c\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})\\
&= D(a\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b})+D(c\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})\\
&= aD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b})+cD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{b}) &= D(\boldsymbol{e}_i,b\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2)\\
&= D(\boldsymbol{e}_i,b\boldsymbol{e}_1)+D(\boldsymbol{e}_i,d\boldsymbol{e}_2)\\
&= bD(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_1)+dD(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

を代入すると，

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= abD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+adD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+cbD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)+cdD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)\\
&= adD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)-bcD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&= D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(ad-bc)\\
&= D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 4.7　命題 4.10 を証明せよ。

外積は多重線型性と交代性を，内積は多重線型性を持つ。$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_1')\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1'\times\boldsymbol{a}_2$ なので

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3) &= ((\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_1')\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\\
&= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1'\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\\
&= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+(\boldsymbol{a}_1'\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+\det(\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)
\end{aligned}$$

スカラー倍や他の成分に関しても同様に示すことができる。よって多重線型性は示される。

交代性は成分によって証明が大きく異なる。1 番目と 2 番目の成分の交代はやさしい。

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)\\
&= (-\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\\
&= -(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\\
&= -\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)
\end{aligned}$$

2 番目と 3 番目の成分の交代はこれよりは複雑である。最初に $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=-\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)$ を示す。$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ とする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}_1 &= (a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{e}_1\\
&= a_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1+a_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1\\
&= -a_2\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1\\
&= a_3\boldsymbol{e}_2-a_2\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

なので，$(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=0$ を用いると

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&= (a_3\boldsymbol{e}_2-a_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\\
&= a_3(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)-a_2(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)=a_3
\end{aligned}$$

となる。同様に計算すると $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=-a_3$ が分かる。よって $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=-\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ が示される。同様に $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=-\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)$ が分かる。多重線型性を用いて計算すると交代性をもつことが分かる。

演習問題 4.8　3 次行列の行列式に対しても定理 4.1 と同様の事が成立している事を示せ。即ち $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とし，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ とおく。また行列 A に対し線型写像 f_A を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると次が成立する事を示せ。

$$\begin{aligned}
\det(A) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ は 1 次独立である} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ は } \mathrm{Im}(f_A) \text{ の基底をなす} \\
&\Longleftrightarrow \quad A \text{ は逆行列をもつ} \\
&\Longleftrightarrow \quad f_A \text{ に対し逆写像 } f_B \text{ が存在する}
\end{aligned}$$

ここでも記法が混乱しています。前と同様に T_A で書きます。一番最後の同値は演習問題 4.1 で示している。問題は 2 次行列についてだが，証明を見ればわかるように，一般の次数で通じる証明である。それ以外をここで示す。$\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立 $\Longrightarrow \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底をなす $\Longrightarrow A$ は逆行列をもつ $\Longrightarrow \det(A) \neq 0$ の順で示す。

最初は対偶命題を示す。$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立でないと仮定すると，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2) \neq (0, 0, 0)$ であるスカラーが存在して $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ となっている。その他の場合も同様に示すことができるので $\alpha_1 \neq 0$ の場合に示す。このとき $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 = -\alpha_2\boldsymbol{a}_2 - \alpha_3\boldsymbol{a}_3$ とし，α_1 で両辺を割ると $\boldsymbol{a}_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_3$ と書ける。これを $\boldsymbol{a}_1 = b_2\boldsymbol{a}_2 + b_3\boldsymbol{a}_3$ と書き直しておく。

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= ((b_2\boldsymbol{a}_2 + b_3\boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= (b_2\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_2 + b_3\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= (b_2\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + (b_3\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= b_2(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + b_3(\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\
&= b_3(\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ は直交しているので内積は 0，よって $\det(A) = 0$ となる。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であるとする。このとき $3 \leqq \dim \mathrm{Im}(T_A)$ が成立するが，$\mathrm{Im}(T_A) \subseteq \boldsymbol{K}^3$ より $\dim \mathrm{Im}(T_A) \leqq \dim \boldsymbol{K}^3 = 3$ より $\dim \mathrm{Im}(T_A) = 3$ となる。基底を構成するベクトルの個数は一定数で今の場合 3 個である。よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底になる。(証明の中で $\mathrm{Im}(T_A) = \boldsymbol{K}^3$ を証明していることに注意)

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathrm{Im}(T_A)$ $(= \boldsymbol{K}^3)$ の基底であるから任意のベクトルを線型結合で表示できる。よって基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に対しスカラー b_{ij} が存在して

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{21}\boldsymbol{a}_2 + b_{31}\boldsymbol{a}_3 \\
\boldsymbol{e}_2 &= b_{12}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + b_{32}\boldsymbol{a}_3 \\
\boldsymbol{e}_3 &= b_{13}\boldsymbol{a}_1 + b_{23}\boldsymbol{a}_2 + b_{33}\boldsymbol{a}_3
\end{aligned}$$

と書ける。このとき $B = (b_{ij})$ とおくと $AB = E$ が成立する。

　最後を示すために，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を用いる。これの略証は次の様である。$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots, \boldsymbol{a}_3)$, $B = (b_i j$, $AB = (\boldsymbol{c}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{c}_2)$ とおくと $\boldsymbol{c}_k = b_{1k}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{3k}\boldsymbol{a}_3$ と書ける。これを利用して $\det(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ を変形して行くと $C\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ となり，$C = \det(B)$ が分かる。これを用いると最後が証明できる。