# 線形解析 II 問題解説 #7

河野

**演習問題 4.14**　次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ (因数分解した形で)

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$ (因数分解した形で)

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ ($n$ は 5 以上の自然数)

簡単なものは計算結果のみを示します。行列式の求め方が分からない人は重傷です。友人に聞いて理解するか，私のところに質問に来てください。

(1) 160

(2) $-2$ この問題はタイプミスで本当は $(3,3)$–成分を 1 にするはずでした。そうならば値は $-3$ でした。

(3) $x_1x_2x_3 - (x_1+x_2+x_3) + 2$

(4) $x_1x_2x_3x_4 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 2(x_1+x_2+x_3+x_4) - 3$ (3)(4) を見ると，何か法則性がありそうですね。興味のある人は一般の $n$ 次行列の場合を考えて見てください。行列は対角成分以外はすべて 0 で対角成分が順に $x_1, x_2, \ldots, x_n$ となっている行列です。

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \quad (1\ \text{列の}-1\ \text{倍を}\ 2\ \text{列に})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix} \quad (1\ \text{列の}-1\ \text{倍を}\ 3\ \text{列に})$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_1)
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} \quad \text{(1 列の$-1$ 倍を 2 列に)} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 \end{vmatrix} \quad \text{(1 列の$-1$ 倍を 3 列に)} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} \quad \text{(1 列の$-1$ 倍を 4 列に)} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 & x_4 + x_1 \\ x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & x_4^2 + x_4 x_1 + x_1^2 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \times \\
&\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 & x_4 + x_1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \quad \text{(2 行の$-x_1$倍を 3 行に)} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \times \\
&\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \quad \text{(1 行の$-x_1$倍を 2 行に)} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \\
&= \prod_{i>j} (x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

ただし $\displaystyle\prod_{i>j}$ は $4 \geqq i > j \geqq 1$ となるすべての $i, j$ に関して積をとったもの。

(7) 前問，前々問で予想がついたかもしれない。結果は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

となる。ただし，$\displaystyle\prod_{i>j}$ は $n \geqq i > j \geqq 1$ となるすべての $i, j$ に関して積をとったものとする。証明は $n$ に関する帰納法で行う。$n-1$ のとき成立を仮定する。文字 $x_2, \ldots, x_n$ に適用すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = {\prod_{i>j}}'(x_i - x_j)$$

を得る。ただし $\displaystyle{\prod_{i>j}}'$ は $n \geqq i > j \geqq 2$ となるすべての $i, j$ に関して積をとったものとする。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (1\text{ 列の }-1\text{ 倍を }2\text{ 列目に}) \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \quad (1\text{ 列の }-1\text{ 倍を }n\text{ 列目に}) \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 + x_1 & \cdots & x_n + x_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 + x_1 & \cdots & x_n + x_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad (n-2\text{ 行の }-x_1\text{ 倍を }n-1\text{ 行目に})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \cdots \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad (1\text{ 行の }-x_1\text{ 倍を }2\text{ 行目に}) \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\prod_{i>j}{}'(x_i - x_j) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

よって任意の $n$ について等式が成立する。

**演習問題 4.15**　次の行列が逆行列を持つ時はそれを求めよ。

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}
$$

ただし，$a, b, c, d$ は自分の学生番号の下 4 桁。最初にこの節で学んだ方法で計算し，その後以前学んだ基本変形を用いる方法で計算せよ。そして計算量を比較せよ。

逆行列を持たない番号のものは，それがわかった段階で終了してもよいし，計算力をつけるため友人の番号で計算してもよい。

さらに力をつけたいものは $a, b, c, d$ を一般の定数として計算せよ。

小行列は $A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ b & c & d \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & c & d \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & b & d \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ b & c & d \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & c & d \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & b & d \end{pmatrix},\ A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & c & d \end{pmatrix},\ A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ a & c & d \end{pmatrix},\ A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & b & d \end{pmatrix},\ A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$

$A_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であ

り，$\widetilde{A}$ の成分は

$$\begin{aligned}
&\widetilde{a}_{11} = \det(A_{11}) = -4c && \widetilde{a}_{12} = -\det(A_{12}) = 3c \\
&\widetilde{a}_{13} = \det(A_{13}) = 4a - 3b + d && \widetilde{a}_{14} = -\det(A_{12}) = -c \\
&\widetilde{a}_{21} = -\det(A_{21}) = -3b - c + d && \widetilde{a}_{22} = \det(A_{22}) = 3a \\
&\widetilde{a}_{23} = -\det(A_{23}) = a && \widetilde{a}_{24} = \det(A_{24}) = -a \\
&\widetilde{a}_{31} = \det(A_{31}) = 2b + 2c - 2d && \widetilde{a}_{32} = -\det(A_{32}) = -2a - c + d \\
&\widetilde{a}_{33} = \det(A_{33}) = -2a + b && \widetilde{a}_{34} = -\det(A_{34}) = 2a - b \\
&\widetilde{a}_{41} = -\det(A_{41}) = 4 && \widetilde{a}_{42} = \det(A_{42}) = -3 \\
&\widetilde{a}_{43} = -\det(A_{43}) = -1 && \widetilde{a}_{44} = \det(A_{44}) = 1
\end{aligned}$$

となる。$4a - 3b - c + d \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{4a-3b-c+d}\begin{pmatrix} -4c & -3b-c+d & 2b+2c-2d & 4 \\ 3c & 3a & -2a-c+d & -3 \\ 4a-3b+d & a & -2a+b & -1 \\ -c & -a & 2a-b & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

次に基本変形を用いて逆行列を計算する。

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(1\,行)\leftrightarrow(2\,行)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2\,行)\leftrightarrow(3\,行)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(1\,行)\,\to\,(1\,行)\,-\,2\times(2\,行)]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(4\,行)\,\to\,(4\,行)\,-\,a\times(1\,行)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 4a+d & 0 & -a & 2a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4\,行)\,\to\,(4\,行)\,-\,b\times(2\,行)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 4a-3b+d & 0 & -a & 2a-b & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4\,行)\,\to\,(4\,行)\,-\,c\times(3\,行)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a-3b-c+d & -c & -a & 2a-b & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4\,行)\,\to\,\frac{1}{4a-3b-c+d}\times(4\,行)]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{-c}{4a-3b-c+d} & \dfrac{-a}{4a-3b-c+d} & \dfrac{2a-b}{4a-3b-c+d} & \dfrac{1}{4a-3b-c+d} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{4c}{4a-3b-c+d} & \dfrac{-3b-c+d}{4a-3b-c+d} & \dfrac{2b+2c-2d}{4a-3b-c+d} & \dfrac{4}{4a-3b-c+d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{3c}{4a-3b-c+d} & \dfrac{3a}{4a-3b-c+d} & \dfrac{2a+c-d}{4a-3b-c+d} & \dfrac{-3}{4a-3b-c+d} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{4a-3b+d}{4a-3b-c+d} & \dfrac{a}{4a-3b-c+d} & \dfrac{-2a+b}{4a-3b-c+d} & \dfrac{-1}{4a-3b-c+d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{-c}{4a-3b-c+d} & \dfrac{-a}{4a-3b-c+d} & \dfrac{2a-b}{4a-3b-c+d} & \dfrac{1}{4a-3b-c+d} \end{array}\right)$$

となり，逆行列が求まる。

**演習問題 4.16**　次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。ただし $a, b$ は自分の学生番号の下２桁。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = -a^3 - b^3 + 3ab - 1 = -(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1)$$

なので，$a^2+b^2-ab-a-b+1=0$ の場合は 1 次独立ではなく，$a^2+b^2-ab-a-b+1 \neq 0$ のときは 1 次独立である。($a, b \geqq 0$ なので $a+b+1=0$ とはならない)

**演習問題 4.17**　この節の方法で演習問題 4.14 から 2 題問題を選び，行列式を計算せよ。

すでに解説してあるので，本演習問題の解説は省略する。分からない人は質問に来てください。