線形解析 II 問題解説 #8

河野

演習問題 5.1　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有多項式は

$$\Phi_A(t) \quad = \quad \det(tE - A) = t^3$$

なので，固有値は $t^3 = 0$ の解，すなわち 0 である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 0 に属する A の固有ベクトルとすると，

$$A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$$

が成立している。成分で書くと

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶ。固有値 0 は 3 重解であるが，固有ベクトルで 1 次独立なものは 1 個しかとれない。

(2)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。固有多項式は

$$\Phi_A(t) = t^3 - 3t^2 - 14t - 8$$

なので，固有方程式は $t^3 - 3t^2 - 14t - 8 = 0$ である。$\Phi_A(-2) = 0$ なので $\Phi_A(t)$ は $t + 2$ で割り切れる。

$$\Phi_A(t) = (t + 2)(t^2 - 5t - 4)$$

となるので，$t = -2$ 以外の解は

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

である。それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めると，$0, \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$ に対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-3+\sqrt{41}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(3)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有多項式は

$$\Phi_A(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)^2$$

なので，固有値は $t = \pm 1$ である。1 に対応する固有ベクトルで 1 次独立なものとして

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。-1 に対応する固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。