線形解析 II 問題解説 #9

河野

演習問題 5.2　補題 5.8 及び命題 5.7 を証明せよ。

補題 5.8 : 最初に「あるゼロでないベクトル x が存在して $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $\det(B) = 0$」を示す。結論を否定すると $\det(B) \neq 0$ なので B には逆行列 B^{-1} が存在する。$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の左から B^{-1} をかけると，$B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるが，$B^{-1}B = E$ なので $B^{-1}B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるが，これは矛盾である。

次に「$\det(B) = 0$ ならばあるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」を示す。行列 B のサイズを n とすると $B = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ と書ける。$\det(B) = 0$ より $\mathrm{rank}(B) < n$ となり，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ は 1 次独立ではない。よってスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと，$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{b}_n = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ となるので証明が終る。

命題 5.7 : λ を $\Phi_A(t) = 0$ の解で $\lambda \in \mathbb{K}$ とする。このとき $\det(\lambda E - A) = \Phi_A(\lambda) = 0$ なので補題 5.8 より，あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。このとき $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるので，λ が A の固有値である事が分かる。

逆に λ が A の固有値のとき，定義から $\lambda \in \mathbb{K}$ であり，ゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる。$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$ なので，$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，$\Phi_A(\lambda) = 0$ となる。

演習問題 5.3　次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^4 = 0$ なので，固有値は 0 である。0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$y = z = w = 0$ が成立して

いる。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

(2)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+1) = 0$ なので，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合に分ける必要がある。最初に $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合を考える。このとき固有値は $1, -1$ である。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$x = y = z = w$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。-1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$x = -y = z = -w$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

次に $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合を考える。このとき固有値は $1, -1, i, -i$ である。1 及び -1 に対応する固有ベクトルは $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合と全く同じである。i に対応する固有べを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$y = ix, z = iy, w = iz, x = iw$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ ix \\ -x \\ -ix \end{pmatrix}$ の形をし

ている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。$-i$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$y = -ix, z = -iy, w = -iy, x = -iw$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ -x \\ ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

(3)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t-1)^2(t+1)^2 = 0$ なので固有値は $1, -1$ である。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$w = x, z = y$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に 1 次独立な固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。-1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$w = -x, z = -y$ が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に 1 次独立な固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

演習問題 5.4　　命題 5.9 を証明せよ。

A が対角化可能であるとする。P を正則行列で，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となるものとする。$P = (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)$ とおくと，$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となる。$AP = A(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n) = (A\boldsymbol{u}_1 \cdots A\boldsymbol{u}_n)$ かつ $(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{u}_n)$ より，各 i $(i = 1, \ldots, n)$ について $A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i\boldsymbol{u}_i$ となる。また P が正則なことから $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である。各ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ がゼロベクトルになることはない。よって $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立な固有ベクトルである。

逆に n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が存在するとする。$P = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ とおくとき，P は正則である。また

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (A\boldsymbol{u}_1, \ldots, A\boldsymbol{u}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので，A は対角化可能である。

演習問題 5.5　次の行列が対角化可能かどうか調べよ。ただし $\mathbb{K}$ は実数の場合と複素数の場合の 2 通りの場合を調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(1)　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 9t^2 + 24t - 20 = (t-5)(t-2)^2 = 0$$

なので，固有値は $5, 2$ である。よってこの問題では $\mathbb{K}$ が実数か複素数かを区別する必要はない。

　5 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 3x+y+z &= 5x \\ x+3y+z &= 5y \\ x+y+3z &= 5z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

　2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 3x+y+z &= 2x \\ x+3y+z &= 2y \\ x+y+3z &= 2z \end{aligned}$$

が成立している。これは 3 式とも $x+y+z=0$ なので，$x+y+z=0$ をみたすベクトルは 2 に属する固有ベクトルとなる。特に固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(2)　$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t)=\det(tE-A)=t^3-6t^2+11t-6=(t-1)(t-2)(t-3)=0$$

なので，固有値は $1,2,3$ である。よってこの問題でも $\mathbb{K}$ が実数か複素数かを区別する必要はない。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 0x - 2y - z &= x \\ x + 3y + z &= y \\ 2x + 2y + 3z &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 0x - 2y - z &= 2x \\ x + 3y + z &= 2y \\ 2x + 2y + 3z &= 2z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

3 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 0x - 2y - z &= 3x \\ x + 3y + z &= 3y \\ 2x + 2y + 3z &= 3z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(3)　$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2) = 0$$

なので，固有値は $0, 1, 2$ である。よってこの問題でも $\mathbb{K}$ が実数か複素数かを区別する必要はない。

0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} -x - 2y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} -x - 2y - z &= x \\ x + 2y + z &= y \\ 2x + 2y + 2z &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} -x - 2y - z &= 2x \\ x + 2y + z &= 2y \\ 2x + 2y + 2z &= 2z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4)　$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考える。$\theta = 0$ のとき $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なのですでに対角行列になっている。また $\theta = \pi$ のとき $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なのでこの場合もすでに対角行列になっている。よって以下 $\theta \neq 0, \pi$ と仮定する。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^2 - 2\cos\theta t + 1 = 0$$

である。この 2 次方程式の判別式は負なので実数解を持たない。よって $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき対角化不可能である。$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ および $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を 2 解にもつ。

$e^{i\theta}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y &= (\cos\theta + i\sin\theta)x \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y &= (\cos\theta + i\sin\theta)y \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$e^{-i\theta}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{array}{rcl} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y &=& (\cos\theta - i\sin\theta)x \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y &=& (\cos\theta - i\sin\theta)y \end{array}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(5)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1) = 0$$

である。$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき固有値は 1 のみで，重解でないので固有ベクトルで 1 次独立なものを 2 個以上選ぶことはできない。よって対角化不可能である。

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき固有値は $1, i, -i$ の 3 個である。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{array}{rcl} x + 0y - 2z &=& x \\ 0x + y + 2z &=& y \\ 0x - y - z &=& z \end{array}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

i に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{array}{rcl} x + 0y - 2z &=& ix \\ 0x + y + 2z &=& iy \\ 0x - y - z &=& iz \end{array}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ \left(\dfrac{-1+i}{2}\right)x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dfrac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$-i$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{array}{rcl} x + 0y - 2z &=& -ix \\ 0x + y + 2z &=& -iy \\ 0x - y - z &=& -iz \end{array}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ \left(\dfrac{-1-i}{2}\right)x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dfrac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{-1+i}{2} & \dfrac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1+i}{2} & -i \\ 0 & \dfrac{1+i}{2} & i \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - (a+b+1)t^2 + (a+b+ab)t - b = (t-1)(t-a)(t-b) = 0$$

なので，固有値は $1, a, b$ である。この問題は $\mathbb{K}$ が実数か複素数かという場合分けは必要ないが，定数 a, b の条件による場合分けが必要になる。計算を実行してみると分かるが，$a-1$ や $b-a$ 等で式を割りたい場合が発生する。そこで割算を実行できるための条件 $a-1 \neq 0$ や $b-a \neq 0$ 等が必要になる。

最初に $1 \neq a \neq b \neq 1$ の場合を考える。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} x + y + 0z &= x \\ 0x + ay + z &= y \\ 0x + 0y + bz &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

a に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} x + y + 0z &= ax \\ 0x + ay + z &= ay \\ 0x + 0y + bz &= az \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ (a-1)x \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

b に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} x + y + 0z &= bx \\ 0x + ay + z &= by \\ 0x + 0y + bz &= bz \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ (b-1)x \\ (b^2 - ba - b + a)x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有

ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b-1 \\ b^2-ba-b+a \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & b^2-ba-b+a \end{pmatrix} \text{とおくと } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{a-b}{(1-a)(b^2-ba-b+a)} \\ 0 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{b-1}{(1-a)(b^2-ba-b+a)} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b^2-ba-b+a} \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

$a = b$ のとき a に対応する固有ベクトルで 1 次独立なものを 2 個選ぶことができないので対角化不可能。よって $a \neq b$ とする。

$a = 1$ のとき 1 に対応する固有ベクトルで 1 次独立なものを 2 個選ぶことができないので対角化不可能。$b = 1$ のときも同様に対角化不可能である。

演習問題 5.6　演習問題 5.3 の行列に対し $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合と $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の 2 つの場合に対角化を試みよ。対角化不可能な場合は理由も述べること。

(1)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。演習問題 5.4 のとき求めた様に A の固有値は 1 のみであり 4 重解であるが，それに属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしており，1 次独立なものは 1 個しか選べない。A が対角化できる必要十分条件は 1 次独立な固有ベクトルが 4 個存在する事なので，A は対角化不可能である。

(2)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。最初に $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合を考える。固有値は $1, -1$ の 2 つであり，1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$，$-1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$ の形をしている。1 次独立な固有ベクトルは，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の様に 2 個しか選べない。A が

対角化できる必要十分条件は 1 次独立な固有ベクトルが 4 個存在する事なので，A は対角化不可能である。

次に $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合を考える。演習問題 5.4 のときに求めた様に $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}i\\-1\\-i\\1\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}-i\\-1\\i\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立な固有ベクトルである。$P=\begin{pmatrix}1&-1&i&-i\\1&1&-1&-1\\1&-1&-i&i\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ とおくと P は正則で，$P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-i&-1&i&1\\i&-1&-i&1\end{pmatrix}$ となり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}$$

となる。

(3)　A$=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ とおく。演習問題 5.4 で求めたように $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立な固有ベクトルである。$P=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ とおくと P は正則で，$P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\-1&0&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$ となり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

となる。