# 線形解析 II 問題解説 #10

河野

**演習問題 5.7**　命題 5.14 を示せ。

(1)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。平面のベクトルの場合は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 \geqq 0$$

であり，空間のベクトルの場合は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 \geqq 0$$

なので，いずれの場合も $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ が成立している。
　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ のとき，平面のベクトルの場合は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 = 0$$

から $x = y = 0$ となり，また空間のベクトルの場合は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

から $x = y = z = 0$ となるので，いずれの場合も $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立している。

(2)　$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。平面のベクトルの場合は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = xx' + yy' = x'x + y'y = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

であり，空間のベクトルの場合は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = xx' + yy' + zz' = x'x + y'y + z'z = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

となるので，いずれの場合も $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立している。

(3)　$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とする。

　(1)　平面のベクトルの場合は

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= (x + x')x'' + (y + y')y'' \\ &= xx'' + x'x'' + yy'' + y'y'' \\ &= xx'' + yy'' + x'x'' + y'y'' \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

であり，空間のベクトルの場合は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= (x+x')x''+(y+y')y''+(z+z')z'' \\ &= xx''+x'x''+yy''+y'y''+zz''+z'z'' \\ &= xx''+yy''+zz''+x'x''+y'y''+z'z'' \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

なので，いずれの場合も $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成立している。

(2)　平面のベクトルの場合は

$$(a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=axx'+ayy'=a(xx'+yy')=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

であり，空間のベクトルの場合は

$$(a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=axx'+ayy'+azz'=a(xx'+yy'+zz')=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

なので，いずれの場合も $(a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成立している。

(4)　余弦定理より

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$$

が成立している。このとき

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{y},-\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\ &= |\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

なので

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$$

が成立する。

$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ が直交しているとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ となる。逆に $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ のとき $|vecx|=0$ または $|\boldsymbol{y}|=0$ または $\cos\theta=0$ である。$\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ がゼロベクトルのときは定義により直交している。$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ がともにゼロベクトルでないときは $\cos\theta=0$ なので $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となり，やはり直交している。

**演習問題 5.8**　　命題 5.14 の内積の性質 (2)，(3) から 2 番目の成分に関する線型性，すなわち

(5)　任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ ，および

(6)　任意の実数 $\alpha$ と任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

が成立することを示せ。

(5)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &= (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

となり成立する。
(6)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) &= (a\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\\ &= a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\\ &= a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となり成立する。

**演習問題 5.9**　命題 5.16 を示せ。

(1)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqq 0$$

となる。また $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ のときすべての $i$ に対し $x_i = 0$ となるので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。
(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\\ &= y_1x_1 + \cdots + y_nx_n\\ &= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり成立している。
(3)　$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ とする。
　(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= (x_1+y_1)z_1 + \cdots + (x_n+y_n)z_n\\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + \cdots + x_nz_n + y_nz_n\\ &= x_1z_1 + \cdots + x_nz_n + y_1z_1 + \cdots + y_nz_n\\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\end{aligned}$$

　となり成立している。
　(2)

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= ax_1y_1 + \cdots + ax_ny_n\\ &= a(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)\\ &= a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

　となり成立している。

**演習問題 5.10**　演習問題 5.8 と同様に $\mathbb{R}^n$ の場合も 2 番目の成分に関して線型性をもつ。すなわち次が成立する。この事を証明せよ。
(1)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

(2)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &= (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\end{aligned}$$

となり成立する。
(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) &= (a\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\\ &= a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\\ &= a(\boldsymbol{x} m \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となり成立する。
　証明が演習問題 5.8 と全く同じであることに注意。成分に依存しない証明は次元によらず適用可能な場合が多い。

**演習問題 5.11**　Schwarz の不等式から次の 3 角不等式を導け; 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

であるが，シュワルツの不等式により

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

が成立するので

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

を得る。これより与式が示される。

**演習問題 5.12**
(1) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 4 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 5 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(1)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおく。$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交しているので

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right) = 1x + 1y + 0z + 0w = x + y = 0$$

である。同様に

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。これより $x = w, y = -w, z = -w$ を得るので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ -w \\ -w \\ w \end{pmatrix}$ の形をしている。

$\boldsymbol{x}$ の長さは 1 なので

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = w^2 + (-w)^2 + (-w)^2 + w^2 = 4w^2 = 1$$

より $w = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって求めるベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交しているので

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} \right) = 1u + 1v + 1w + 0x + 0y = u + v + w = 0$$

である。同様に

$$
\begin{aligned}
u+v+w+x+y &= 0 \\
u+2v+3w+4x+5y &= 0 \\
u+2v+w+2x+y &= 0
\end{aligned}
$$

が成立している。これより $u=0, v=y, w=-y, x=-y$ を得るので $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \\ -y \\ y \end{pmatrix}$ の形をしている。$\boldsymbol{x}$ の長さは 1 なので

$$
\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0^2+y^2+(-y)^2+(-y)^2+y^2 = 4y^2 = 1
$$

より $y=\pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって求めるベクトルは

$$
\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

である。

**演習問題 5.13**　定理 5.19 の証明で 1 次独立性を使っていないように見えるが，実はそのことは使われている。どの部分に使われているか指摘せよ。

$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立でないとき $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ になる。よって $\|\boldsymbol{y}_2\|$ は 0 になるので，$\|\boldsymbol{y}_2\|$ で割ることはできない。一般の場合も同様で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ が 1 次独立で，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立でないとき $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ になるので，$\|\boldsymbol{y}_k\|$ で割り算を実行することができない。

**演習問題 5.14**　次のベクトルの組からシュミットの直交化法を用いて正規直交系をつくれ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

それぞれのベクトルを順に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_3$ または $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ とする。

(1)

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

なので

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{4}{\sqrt{3}}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|} \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \times (-1) + 1 \times 2 + 3 \times (-1)) = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}\right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|} \boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$$

なので

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1) = 1$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1) = \dfrac{3}{2}$,
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{2}(1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times (-1)) = \dfrac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|}\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。
(3)

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$$

なので

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1) = 1$ なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \dfrac{3}{2}$,
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{2}(0 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1) = \dfrac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|}\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 1) = 5$,
$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{2}(1 \times (-1) + 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 4 \times 1) = 1$,
$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4 \times 0) = \sqrt{2}$ なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_4 &= \boldsymbol{v}_4 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{x}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_4\|}\boldsymbol{y}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

**演習問題 5.15**　次の行列 $A$ で表現される線型写像を与えられた基底で表現した場合の行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1)　成分に分けて議論する方法と，行列のまま考える方法の 2 通りの方法で解く。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と書けるとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

と表した。このとき

$$\begin{aligned} x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \\ &= a_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1) + a_2(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \\ &= (a_1 + 2a_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_1 + a_2)\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

より

$$x_1 = a_1 + 2a_2, \quad x_2 = a_1 + a_2$$

という関係がある。

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

とすると

$$y_1 = 4x_1 - 2x_2, \quad y_2 = x_1 + x_2$$

なる関係がある。また $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ と表したとき，$\boldsymbol{x}$ のときと同様に計算すれば

$$y_1 = b_1 + 2b_2, \quad y_2 = b_1 + b_2$$

が得られる。これを逆に解くと

$$b_1 = 2y_2 - y_1, \quad y_2 = y_1 - y_2$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2y_2 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2) - (4x_1 - 2x_2) \\ (4x_1 - 2x_2) - (x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2(a_1 + 2a_2) + 4(a_1 + a_2) \\ 3(a_1 + 2a_2) - 3(a_1 + a_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

より求める表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

次に行列のまま考えて解いてみよう。$T_A(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = 3\boldsymbol{x}_2$ であることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \\
&= T_A(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2) \\
&= a_1 T_A(\boldsymbol{x}_1) + a_2 T_A(\boldsymbol{x}_2) \\
&= a_1 2\boldsymbol{x}_1 + a_2 3\boldsymbol{x}_2 \\
&= 2a_1\boldsymbol{x}_1 + 3a_2\boldsymbol{x}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

求める表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

(2)　$T_A(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_3) = A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1$ であることに注意しておく。$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3$ と表され，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ となっているとする。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \\
&= T_A(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3) \\
&= a_1T_A(\boldsymbol{x}_1) + a_2T_A(\boldsymbol{x}_2) + a_3T_A(\boldsymbol{x}_3) \\
&= 3a_1\boldsymbol{x}_1 + 2a_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 \\
&= \begin{bmatrix} 3a_1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(3)　$T_A(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$ であることに注意しておく。(1) と同様に $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しておく。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \\
&= T_A(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2) \\
&= a_1T_A(\boldsymbol{x}_1) + a_2T_A(\boldsymbol{x}_2) \\
&= 3a_1\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 3a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$