線形解析 II 問題解説 #11

河野

演習問題 5.16　補題 5.22 の残りを証明せよ。即ち次を証明せよ ; T, T' を $\mathbb{R}^n$ 上の線型写像とする。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, T'(\boldsymbol{y}))$ が成立するとき，$T = T'$ である。

A, A' を n 次行列とする。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A'\boldsymbol{y})$ が成立するとき，$A = A'$ である。

$\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2 \in \mathbb{R}^n$ が任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}_2)$ が成立するとき $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_2$ であることに注意しておく ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2$ に仮定を適用せよ)。

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, T'(\boldsymbol{y}))$ が成立しているとき，任意の $\boldsymbol{y}$ に対し $T(\boldsymbol{y}) = T'(\boldsymbol{y})$ となる。よって $T = T'$ が成立している。

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A'\boldsymbol{y})$ が成立しているとき，任意の $\boldsymbol{y}$ に対し $A\boldsymbol{y} = A'\boldsymbol{y}$ となる。$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$, $A' = (\boldsymbol{a}'_1 \cdots \boldsymbol{a}'_n)$ とおく。$\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し，$\boldsymbol{a}_i = A\boldsymbol{e}_i = A'\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}'_i$ となり，$A = A'$ が成立している。

演習問題 5.17　n 次行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と表すとき，A が直交行列である必要十分条件は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系である事である事を示せ。

$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ とおく。

$$
\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成立している。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系のとき $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$(クロネッカーのデルタ) なので

$$A^T A = E$$

となる。逆に $A^T A = E$ のとき $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ となるので，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は正規直交系である。

演習問題 5.18　補題 5.25 を証明せよ。

(1)　A は対称行列，O は直交行列なので，

$$\begin{aligned}(O^TAO)^T &= (AO)^T\left(O^T\right)^T \\ &= O^TA^TO \\ &= O^TAO\end{aligned}$$

なので O^TAO は対称行列である。
(2)

$$\begin{aligned}(OO')^T(OO') &= O'^TO^T(OO') \\ &= O'^Y(O^TO)O' \\ &= O'^TEO' \\ &= O'^TO' \\ &= E\end{aligned}$$

となるので，OO' は直交行列である。
(3)　演習問題 5.17 と同様に計算すると

$$A^TB = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n) \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 5.19　次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1)　A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = (t-1)(t-3) = 0$$

なので固有値は $t = 1, 3$ である。3 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$P^{-1} = P^T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(2)　A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^2(t-3) = 0$$

なので固有値は $t = 0, 3$ である。3 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$x + y + z = 0$ を得る。1 次独立なベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。シュミットの直交化法を実行すると

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

P を求める別の方法：ここではシュミットの直交化法を用いて直交する固有ベクトルを求めたが，直接直交する固有ベクトルを求めることができる。どちらの方法を用いて求めてもよい。直接求める方法も述べておく。0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $x + y + z = 0$ を得

る。長さ 1 の固有ベクトルとして $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶ。次に $\boldsymbol{x}_2$ と直交する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。条件より $x+y+z=0$ (固有ベクトルの条件), $-x+y=0$ ($\boldsymbol{x}_2$ と直交するための条件), $x^2+y^2+z^2=1$ (長さ 1) を満たしている。$x=y$ を $x+y+z=0$ に代入して $z=-2x$ を得る。よって $1 = x^2+x^2+(-2x)^2 = 6x^2$ より $x \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を得る。($x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を選んでもよいが，先程と同じにするため) $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

(3)　A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 7t^2 + 12t - 4 = 0$$

であり，$\Phi_A(2) = 0$ となるので $\Phi_A(t) = (t-2)(t^2-5t+2)$ と因数分解できるので固有値は $t = 2, \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ である。2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{v}_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$ となる。

長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}}$ である。$x = \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} \\ \dfrac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$ を選ぶ。

$\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{v}_3 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$ となる。

長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-2\sqrt{17}}}$ である。$x = \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$ を選ぶ。

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} & \frac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} & \frac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ 0 & \frac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} & -\frac{2}{\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^TAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4)　A の固有方程式は

$$\Phi_A(t)=\det(tE-A)=(t-5)(t-1)^3=0$$

なので固有値は $t=5,1$ である。5 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x=\pm\frac{1}{2}$ である。$x=\frac{1}{2}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$x+y+z+w=0$ を得る。1 次独立なベクトルとして $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。シュミットの直交化法を

実行すると $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。