線形解析 II 問題解説 #14

河野

演習問題 6.8 行列 A が次の形の行列のとき，式 (1) の形の微分方程式を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A を対角化する。対角化に関しては既知として対角化される行列はすでに見つかっているものとする。見つけ方の分からないものは対角化の節 (5.2) を見ること。

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$ なので，この微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

となる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置くと $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ となる。$\dfrac{d}{dt}\left(P^{-1}\boldsymbol{x}\right) = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ なので，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$$

と変形できる。

この式を成分で書くと，

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2u \\ \frac{dv}{dt} &= v \\ \frac{dw}{dt} &= w \end{aligned}$$

なので，簡単に解けて $u=C_1e^{2t}, v=C_2e^t, w=C_3e^t$ が得られる。$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ を用いると，

$$\begin{aligned} x &= C_1e^{2t}+2C_2e^t+C_3e^t \\ y &= C_1e^{2t}+C_2e^t \\ z &= -2C_2e^{2t}+C_3e^t \end{aligned}$$

が得られる。

(2)　$\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ となる。

$P=\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

である。

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$ なので，この微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$$

となる。$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置くと $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ となる。$\dfrac{d}{dt}\left(P^{-1}\boldsymbol{x}\right)=P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ なので，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=P^{-1}AP\boldsymbol{y}$$

と変形できる。

　この式を成分で書くと，

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \\ \frac{dv}{dt} &= \omega v \\ \frac{dw}{dt} &= \omega^2 w \end{aligned}$$

なので，簡単に解けて $u=C_1e^t, v=C_2e^{\omega t}, w=C_3e^{\omega^2 t}$ が得られる。$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ を用いると，

$$\begin{aligned} x &= C_1e^t+\omega C_2e^{\omega t}+\omega^2C_3e^{\omega^2 t} \\ y &= C_1e^t+C_2e^{\omega t}+C_3e^{\omega^2 t} \\ z &= C_1e^t+\omega^2C_2e^{\omega t}+\omega C_3e^{\omega^2 t} \end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 6.9　行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，3) の形の微分方程式を解け。

3 角化を実行する。A の固有方程式は $\Phi_A(t)=\det(tE-A)=(t-2)^2=0$ なので，固有値は 2 である 2 に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。1 次独立なベクトルを 2 個選ぶことはできないので対角化不可能である。$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が 1 次独立になるように $\boldsymbol{w}$ を選ぶ。$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選び，$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置くと，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ である。$P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\dfrac{dP^{-1}\boldsymbol{x}}{dt}$ なので，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=P^{-1}AP\boldsymbol{y} \tag{1}$$

と変形できる。この式を成分で書くと，

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2u+v \\ \frac{dv}{dt} &= 2v \end{aligned}$$

である。v は簡単に解けて $v=C_1e^{2t}$ となるので，u に関する微分方程式

$$\frac{du}{dt}=2u+C_1e^{2t}$$

を得る。微分方程式は $(D_t-2)u=C_1e^{2t}$ となる。

$$e^{2t}De^{-2t}u=C_1e^{2t}$$

と変形して，$w=e^{-2t}u$ とおくと $Dw=C_1$ となるので，$w=C_1t+C_2$ を得る。$u=we^{2t}=C_1te^{2t}+C_2e^{2t}$ なので

$$x=u=(C_1t+C_2)e^{2t} \qquad y=-u+v=-(C_1t+C_2)e^{2t}+C_1e^t=-C_1e^{2t}+(C_1-C_2)e^{2t}$$

となる。

演習問題 6.10　行列 A が次の形の行列のとき，式 (1) の形の微分方程式を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

である。成分で書くと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= y + z \\ \frac{dz}{dt} &= z \end{aligned}$$

である。z に関する微分方程式を解くと

$$z = C_1 e^t$$

が得られる。これを 2 番目の微分方程式に代入すると

$$(D_t - 1)y = C_1 e^t$$

を得る。$D_t - 1 = e^t D_t e^{-t}$ を用いると

$$e^t D_t e^{-t} y = C_1 t^t$$

より $D_t e^{-t} y = C_1$ となるので，$w = e^{-t} y$ とおくと

$$D_t w = C_1$$

となり，

$$w = C_1 t + C_2$$

より

$$y = (C_1 t + C_2) e^t$$

を得る。

　最初の微分方程式に代入すると

$$e^{2t} D_t e^{-2t} x = (C_1 t + C_2) e^t$$

なので，$u = e^{-2t} x$ とおくと

$$D_t u = (C_1 t + C_2) e^{-t}$$

となる。

$$u = (-C_1 t - C_1 - C_2) e^{-t} + C_3$$

なので

$$x = -(C_1 t + C_1 + C_2)e^t + C_3 e^{2t}$$

となる。

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

である。成分で書くと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= y + z \\ \frac{dz}{dt} &= z \end{aligned}$$

である。z に関する微分方程式を解くと

$$z = C_1 e^t$$

が得られる。これを 2 番目の微分方程式に代入すると

$$(D_t - 1)y = C_1 e^t$$

を得る。$D_t - 1 = e^t D_t e^{-t}$ を用いると

$$e^t D_t e^{-t} y = C_1 t^t$$

より $D_t e^{-t} y = C_1$ となるので，$w = e^{-t} y$ とおくと

$$D_t w = C_1$$

となり，

$$w = C_1 t + C_2$$

より

$$y = (C_1 t + C_2)e^t$$

を得る。

　最初の微分方程式に代入すると

$$e^t D_t e^{-t} x = (C_1 t + C_2)e^t$$

なので，$u = e^{-t} x$ とおくと

$$D_t u = (C_1 t + C_2)$$

となる。

$$u = \frac{1}{2} C_1 t^2 + C_2 t + C_3$$

なので

$$x = \left(\frac{1}{2} C_1 t^2 + C_2 tn + C_3 \right) e^t$$

となる。

演習問題 6.11　この方法で演習問題 6.8 の微分方程式を解け。

(1)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ であり

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Bt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} + 2e^t & -2e^{2t} + e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t & -2e^{2t} + e^t \\ -2e^{2t} + 2e^t & 4e^{2t} - 4e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので解関数を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき,$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を定数を成分とするベクトルとすると

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

となる。

(2)　$\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$\omega^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ となる。

$P = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \end{pmatrix}$ であり

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

である。

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\omega^2 t} \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Bt}P^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t + e^{\omega t} + e^{\omega^2 t} & e^t + \omega e^{\omega t} + \omega^2 e^{\omega^2 t} & e^t + \omega^2 e^{\omega t} + \omega e^{\omega^2 t} \\ e^t + \omega^2 e^{\omega t} + \omega e^{\omega^2 t} & e^t + e^{\omega t} + e^{\omega^2 t} & e^t + \omega e^{\omega t} + \omega^2 e^{\omega^2 t} \\ e^t + \omega e^{\omega t} + \omega^2 e^{\omega^2 t} & e^t + \omega^2 e^{\omega t} + \omega e^{\omega^2 t} & e^t + e^{\omega t} + e^{\omega^2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので解関数を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき,$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を定数を成分とするベクトルとすると

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

となる。