線型代数 I 要綱 #1

2006–4–11　　河野

1　ベクトル空間

最初に高校の復習も兼ねて (数学 B，数学 C を履修していない人にとっては初めてだが)，2 次元・3 次元ベクトル空間に関して学ぶ。その後 n 次元ベクトルへと一般化する。

1.1　2 項数ベクトル空間

この節では **2 項数ベクトル**[(1)] と 2 項数ベクトル空間について述べる。

高校では 2 項数ベクトルは平面ベクトルとも呼ばれ，横ベクトルとして

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$$

と書いていたが，線型代数では通常縦**ベクトル** (*vector*) [(2)] で

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書く。2 項数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ で表し，2 **項数ベクトル空間**という。

集合である数ベクトル空間とその元であるベクトルをきちんと区別できない人がいるので十分注意する事。特に部分集合を表す記号

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \boldsymbol{x}\text{ は}\cdots\text{の性質を持つ} \right\}$$

をきちんと理解する様に。この部分は数学序論も参考にすること。

2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が等しいとは $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ を意味し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と書く。

2 次元ベクトル空間には和と実数倍が以下の様に定義される。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し和を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

で，また実数 α とベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し実数倍を

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) 通常は 2 次元ベクトルと呼ばれる。テキスト等を参考にするときは注意する事。また私も講義中「2 次元ベクトル」と言ってしまう場合もあるかもしれない。そのときは適当に翻訳して理解して下さい。

(2) ドイツ語 Vektor, もともとはラテン語の vectus(運搬) からきている。

と定義する。

ベクトルの概念の発生地は物理学である。高校時代「数学 B」で扱ったようにベクトルは歴史的には「方向と大きさを持った量」と定義された。力，速度等がその様な量である。力等を考えた場合，始点の位置が問題になる。物理学では始点の位置を問題にする見方と，それを問題にせず，平行移動したものも等しいと見る 2 通りの考え方がある。始点の位置を問題にする場合**束縛ベクトル**，しない場合**自由ベクトル**という言い方をする事がある。数学で扱うベクトルはこの表現では自由ベクトルにあたる。

(自由) ベクトルに対し，始点を原点に平行移動したものを考える。このときベクトルとベクトルの終点を対応させる事により，2 次元数ベクトル空間の元であるベクトルと 2 次元ユークリッド空間の点が一対一に対応する。この様に見たときベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶ。2 次元数ベクトル空間を $\mathbb{R}^2$ という記号で書いたのも，この見方から来ている (更に付け加えて言えば，成分表示している事は，このユークリッド空間に直交座標を 1 つ固定して考えている事を意味する)。

和と実数倍に関しては次の 8 つの性質が**基本的**である。

命題 1.1
(1) [**結合法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
(2) [**交換法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
(3) [**零ベクトルの存在**] 零ベクトルと呼ばれるベクトル $\mathbf{0}$ が存在して任意のベクトルについて $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$
(4) [**逆ベクトルの存在**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し逆ベクトルと呼ばれるベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$
(5) [**ベクトルに関する分配法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$$

(6) [**実数倍に関する分配法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$$

(7) [**実数倍に関する結合法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

(8) [**単位倍**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 1 に対し $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

証明 (1) のみ証明しよう。ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とする。実数 a, b, c に対しては結合法則 $a+(b+c)=(a+b)+c$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は定義により $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$ である。さらに定義により $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \end{pmatrix}$ となる。同様に $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ は $\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \end{pmatrix}$ となる。実数の結合法則より，2 つのベクトルの各成分が等しいので $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成立する。 ▮

演習問題 1.1 命題 1.1 を証明せよ。

この命題 1.1 を基本的と言ったのは 2 つの理由がある。1 つはベクトルの諸々の性質はこの 8 つの性質から導かれる事である。例えば任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を証明してみよう。成分表示の形を用いなくても，8 つの性質だけから示されるという点がポイントである。

まず，(6) より $0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$ が得られる[(3)] 。この両辺に $-(0\boldsymbol{x})$ を加えて，

$$0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x})) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (-(0\boldsymbol{x})) = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x})))$$

が得られる。性質 (3),(4) を用いると

$$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$$

が分かる。

演習問題 1.2　次を命題 1.1 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。
(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$
(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

「基本的」であるもう 1 つの理由は，ベクトル空間を最も拡張した概念として抽象的ベクトル空間 (または線型空間) があるが，拡張はこの性質をもつものすべてを線型空間と考える事で行われる。この講義では無限次元ベクトル空間および抽象的ベクトル空間は扱わないが，重要な視点であるので敢えてふれた。

ベクトルの内積について考える。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し，その内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ [(4)] を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

で定義する。

内積で重要なのは次の命題である。

命題 1.2 ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の長さを $|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|$，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

が成立する。ただしゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ はすべてのベクトルと直交するものとする。

証明　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の時命題は成立するので，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする。同様に $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の時命題は成立するので，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ とする。ベクトルを位置ベクトルと考え，ベクトルを平面上の点と同一視する。原点と $\boldsymbol{x}$ を通る直線 ℓ_1 に $\boldsymbol{y}$ から下ろした垂線の足を $t\boldsymbol{x}$ とする。$\cos\theta = \dfrac{t|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}$ なので $|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta = t|\boldsymbol{x}|^2$ である。$t\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を通る直線を ℓ_2 とすると，ℓ_1 と ℓ_2 は直行している。$t = 0$ のときは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直行しているので $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となり，命題は成立している。よって $t \neq 0$ とする。直線の直行条件より $tx_1(y_2 - tx_2) + tx_2(y_1 - tx_1) = 0$ が成立している。これより $x_1y_1 + x_2y_2 = t(x_1^2 + x_2^2)$ が分かるので，前と合わせると命題が示される。∎

この命題から次が従う。

[(3)] ここで $0 + 0 = 0$ という実数の性質を用いた。
[(4)] 高校では $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ と書いたかもしれないが，ここではこの記号を採用する。

系 1.3 2 つベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が直行する必要十分条件は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

1.2　3 項数ベクトル空間

この節では **3 項数ベクトル**[1] と 3 項数ベクトル空間について述べる。この概念は後に n 次元数ベクトル空間 へと拡張される。3 項数ベクトルは幾何的なものととらえる事もできるが，拡張されるとその様な見方はできなくなる。ベクトルに対し幾何学的なイメージを持つ事は重要であるが，概念が拡張されたときに，幾何学的イメージにとらわれず抽象的に考える事も重要である。

高校ではベクトル横ベクトルとして

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

と書いていたが，線形解析では 2 項数ベクトルと同様に通常縦ベクトルで

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と書く。3 項数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^3$ で表し，3 **項数ベクトル空間**という。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ が等しいとは $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ を意味し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と書く。

3 項数ベクトル空間には和と実数倍が以下の様に定義される。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ と実数 α に対し和と実数倍を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \qquad \alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。

ベクトルに対し，始点を原点に平行移動したものを考える。このときベクトルとベクトルの終点を対応させる事により，3 項数ベクトル空間の元であるベクトルと 3 次元ユークリッド空間の点が一対一に対応する。この様に見たときベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶのは 2 次元の場合と同様である。3 項数ベクトル空間を $\mathbb{R}^3$ という記号で書いたのも，この見方から来ている (更に付け加えて言えば，成分表示している事は，このユークリッド空間に直交座標を 1 つ固定して考えている事を意味する)。

和と実数倍に関しては次の 8 つの性質が**基本的**である。

命題 1.4
(1) [**結合法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

[1] 2 項数ベクトルと同様に普通は 3 次元ベクトルと呼ばれる。

(2) [**交換法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(3) [**零ベクトルの存在**] 零ベクトルと呼ばれるベクトル $\mathbf{0}$ が存在して任意のベクトルについて $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$

(4) [**逆ベクトルの存在**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し逆ベクトルと呼ばれるベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$

(5) [**ベクトルに関する分配法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$$

(6) [**実数倍に関する分配法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$$

(7) [**実数倍に関する結合法則**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

(8) [**単位倍**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 1 に対し $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

証明　(1) のみ証明しよう。ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とする。実数 a, b, c に対しては結合法則 $a+(b+c)=(a+b)+c$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は定義により $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ である。さらに定義により $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ (x_3+y_3)+z_3 \end{pmatrix}$ となる。同様に $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ は $\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ x_3+(y_3+z_3) \end{pmatrix}$ となる。実数の結合法則より，2 つのベクトルの各成分が等しいので $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成立する。 ∎

演習問題 1.3　命題 1.4 を証明せよ。

命題 1.4 を基本的と言ったのは命題 1.1 を基本的と言ったのとまったく同じ理由である。

演習問題 1.4　次を命題 1.4 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。

(1) $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$

(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$

成分表示を用いない証明を考えると，演習問題 1.2 と演習問題 1.4 は全く同じ証明になる事が分かる。

3 項数ベクトルに対し内積を定義する。ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し，その内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

で定義する。

2 項数ベクトルの場合と同様に次の命題が成立する。

命題 1.5 ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の長さを $|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|$，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$$

が成立する。

これを示すために次の命題を用いる。証明は容易なので演習問題としよう。

命題 1.6 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^3$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し次が成立する。
(1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$
(2) $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
(3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$
(4) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
(5) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
(6) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$

演習問題 1.5 命題 1.6 を証明せよ。

命題 1.5 の証明： $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の時命題は成立するので，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする。同様に $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の時命題は成立するので，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を位置ベクトルと考え，それが表す点をそれぞれ A, B とする。3 角形 OAB(O は原点) を考える。$OA = |\boldsymbol{x}|$,$OB = |\boldsymbol{y}|$,$AB = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ なので，3 角形 OAB に余弦定理を適用すると，

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$$

が成立する。命題 1.6 より，$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) + ((-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, (-1)\boldsymbol{x}) + ((-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ((-1)\boldsymbol{x}, (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる。よって $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$ が成立する。∎

命題 1.5 の系として次が従う。ただしゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ は任意のベクトルと直交するものとする。

系 1.7 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$

内積の 1 つの応用として空間内の平面の方程式を求めておこう。

命題 1.8 空間内の平面を P とすると，定数 a_1, a_2, a_3, b が存在して
$P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$ となる。逆に a_1, a_2, a_3 のどれかが 0 でなければ $P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$ は平面を表す。

証明 ここではベクトルと空間の点を同一視して考える。P を空間内の平面とする。この平面に直交するベクトルを 1 つ固定し $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とする。また P 上のベクトルを 1 つ固定し $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

とする $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を平面上の任意の点とすると，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は平面上に乗っていると考えられるので $\boldsymbol{a}$ と直交している。よって $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立する。成分で書き直すと $a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3) = 0$ となる。$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = b$ とおくと，$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ が成立している。よって平面はある 1 次式 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ で表される。

逆に 1 次式 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ に対し，$P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が平面上の点であることを示す。a_1, a_2, a_3 のどれかは 0 でない。今簡単のために $a_1 \neq 0$ として証明する ($a_2 \neq 0$ 等の場合も同様に示すことができる)。$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}_0 \in P$ である。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とおき，P の任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = b$ となっている。$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0) = b$ なので，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0)$ がとなり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立している。よって $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は直交しているので，P は $\boldsymbol{a}$ と直交する平面を表す。 ∎